
UMA ARTE DE RACIOCINAR

Hermes Renato Hildebrand

A matemática sempre esteve presente em nossas vidas. Em sua gênese e, segundo Charles Sanders Peirce, lógico, matemático e filósofo americano, esta ciência não observa os dados reais do mundo e pode excluir a possibilidade de relação com qualquer tipo de experiência pura e simples. Para ele, a matemática é desenvolvida no interior de nosso pensamento. Ela nasce apoiada nos signos criados pela razão humana e, assim, é uma ciência que tira conclusões lógicas de qualquer tipo de conjunto de regras pré-estabelecidas, não dando importância às relações destes signos com os fatos do mundo e com o que é real.

Além de ser conhecida como a linguagem dos números e ajudar a explicar como ocorre a cognição humana e o processo de elaboração de conhecimento, a matemática, também mostra através de seus gráficos, diagramas e imagens, que nossa percepção visual é carregada de conceitos e princípios abstratos, lógicos e matemático, a ponto de não podermos identificar se a natureza é construída por modelos lógico-matemáticos, como afirmavam os pitagóricos, ou se construímos modelos lógico-matemáticos para explicar o mundo em que vivemos.

Para Charles Sanders Peirce, em um trecho de seu texto sobre a "*Consciência da Razão*", publicado em "*The New Elements of Mathematics*", encontramos que:

“... as expressões abstratas e as imagens são relativas ao tratamento matemático. Não há nenhum outro objeto que elas representem. As imagens são criações da inteligência humana conforme algum propósito e, um propósito geral, só pode ser pensado como abstrato ou em cláusulas gerais. E assim, de algum modo, as imagens representam, ou traduzem, uma linguagem abstrata; enquanto por outro lado, as expressões são representações das formas. A maioria dos matemáticos considera que suas questões são relativas aos assuntos fora da experiência humana. Eles reconhecem os signos matemáticos como sendo relacionados com o mundo do imaginário, assim, naturalmente fora do universo experimental. (...) Toda a imagem é considerada como sendo a respeito de algo, não como uma definição de um objeto individual deste universo, mas apenas um objeto individual, deste modo, verdadeiramente, qualquer um é de uma classe ou de outra” (NEM 4: 213).

Neste pensamento Peirce dá ênfase aos aspectos diagramáticos das imagens e das expressões matemáticas, cujo enfoque está nas relações entre os diversos elementos que as estruturam. A matemática traz em si uma perspectiva de percepção que sempre esteve presente nos modelos e nas formas de produzir conhecimento dos seres humanos. O homem desde seus primórdios utilizou os signos visuais para representar seus pensamentos. E, quando observamos mais profundamente estes conceitos, nota-

mos que a matemática tem uma abordagem altamente complexa e, dada a sua íntima relação com a lógica, nos leva a afirmar que, são ciências de mesma natureza e, por conseguinte, determinam as formas de organização do conhecimento humano e como ele acontece, sem questionar de onde ele vem. Assim, a matemática, por princípio, pode ser considerada uma ciência que nada tem a ver com qualquer fato real, a não ser com aqueles que extrai de si própria.

E, de fato, confirmando nossas hipóteses a respeito do pensamento matemático e segundo Peirce, nas palavras de Santaella,

"é verdade que as idéias, elas mesmas, podem ser sugeridas por circunstâncias muito especiais; mas a matemática não se importa com isso. Ela é, assim, como a contemplação de um objeto belo, exceto que o poeta o contempla sem fazer perguntas, enquanto o matemático pergunta quais são as relações das partes de suas idéias umas com as outras" (1993: 158).

Sabemos que a principal atividade desta ciência é descobrir as relações internas dos sistemas, sem identificar a que objetos elas se referem. Por isto, os pesquisadores sempre estiveram preocupados com todos os tipos de representações que comportam a matemática, em particular, com as relações entre os signos no interior de sua própria estrutura, preocupando-se com os estímulos visuais e mentais recebidos dela. As imagens são representações dos modelos que concebemos mentalmente, isto é, são signos visuais que exteriorizam o comportamento de nossas idéias abstratas, por isso, são *signos visuais* que realizam nossas *imagens mentais*.

Aqui estamos dando ênfase aos aspectos visuais e diagramáticos das imagens e das expressões matemáticas, cujos enfoques estão nas relações entre os diversos elementos que as estruturam. A matemática traz em si uma perspectiva de percepção que sempre esteve presente nos modelos e nas formas de produzir conhecimento dos seres humanos. Ela é um sistema de signos, cuja gramática sempre fundamentou o discurso racionalista tecno-científico da cultura ocidental. Brian Rotman, de acordo com isto, afirma que as normas, diretrizes e leis deste discurso sempre estiveram profundamente marcadas pelos princípios e estruturas matemáticas em um nível lingüístico e simbólico (1988) e, ainda, segundo Peirce, em um nível diagramático (1983: 42). Assim, nossa escolha recai sobre os valores da cultura ocidental, porque é dela que emanam nossas crenças e percepções do mundo. Podemos evoluir em nosso raciocínio tentando compreender outras culturas, mas, obviamente, nunca deixaremos de ver estes objetos de estudo com bases em nossos paradigmas de percepção.

1. As imagens e a matemática na cultura não ocidental

Apesar do nosso enfoque ser a cultura ocidental, iniciaremos esta reflexão por alguns aspectos que levam em consideração outras culturas, etnias e formas de pensamento, que, se unidas ao processo de percepção planetária a que somos submetidos hoje, nos conduzem a refletir, mesmo que de maneira superficial, sobre outras formas matemáticas. Tomemos então, como base, a noção de "*etnomatemática*" de D' Ambrosio (1990). Ele afirma que o conhecimento matemático está presente nas mais diversas formas culturais e que ao manejar números, quantidades, medidas, relações geométricas, imagens gráficas, padrões repetitivos de representações e tudo o mais relacionado à ciência matemática, estamos tratando de "*etnomatemática*".

De fato, esta área de conhecimento situa-se numa transição entre a matemática convencional e a antropologia cultural. Para ele, o que conhecemos,

“é na verdade uma etnomatemática que se originou e desenvolveu na Europa, tendo recebido algumas contribuições das civilizações indiana e islâmica e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII, e então levada e imposta a todo o mundo a partir do período colonial. Hoje adquire um caráter de universalidade, sobretudo em virtude do domínio da ciência e da tecnologia modernas, desenvolvidas a partir do século XVII na Europa” (D’Ambrosio 2000: 112).

Nossas análises estão baseadas no pensamento de Charles Sanders Peirce e em sua teoria da semiótica que pressupõem a universalidade do raciocínio lógico humano. Para ele, o signo é algo que representa algo para alguém, sob um certo aspecto (Peirce 1983). Assim, fundamentado no modelo triádico peirceano analisaremos os aspectos *topológicos das imagens* produzidos pelo homem pré-histórico, em primeiridade, *aspectos da práxis* das representações geradas no processo de elaboração dos chapéus côncavos e convexos, em secundidade e os *aspectos lógicos* determinado nos padrões de representação na trama da carteira de palha da cultura africana, em terceiridade.

1.1. Aspectos topológicos

O registro do pensamento, em algum tipo de imagem, sobre algum tipo de suporte, vem sendo realizado desde o homem pré-histórico. Junto com estas formas de representação vamos encontrar a necessidade de determinar parâmetros para realizá-las. São conhecidas as imagens dos touros gravadas nas pedras da caverna de Lascaux, na França, com 5 metros de comprimento. E, parece fácil compreender que, para realizá-las, foi necessário um conhecimento técnico e um procedimento lógico-matemático espacial a fim de conceber representações tão grandes, obedecendo as suas devidas proporções. Para utilizar óxido mineral, ossos carbonizados, carvão vegetal e o sangue dos animais abatidos na caça com a intenção de representar imagens nas pedras, o homem necessitou planejar esta tarefa, assim como, também planejou a forma lógica de representar suas primeiras imagens.

A modelagem lógica das imagens dos touros exigiu conhecimento topológico de representação que, de algum modo, capturava os animais. Ou era de forma imagética para fixar suas representações em desenhos, ou era de forma xamânica, mística ou religiosa para dominar os animais, facilitando sua caça (Sogabe 1996: 59-64). No início, acreditávamos que as imagens eram produzidas para delinear as ações do dia a dia. Desde os primeiros registros as imagens já possuíam, entre outras, a característica de serem científicas. Além de estabelecerem as formas de nossos modelos de representação, através de regras de proporcionalidade, também serviam para contabilizar as pessoas, os animais e as coisas do cotidiano. Assim, o homem se mostrava científico desde a pré-história. Primeiro rudimentarmente com seus registros nas pedras e depois, com representações mais detalhadas das imagens das plantas, da anatomia humana e animal, atribuindo a característica de ser um registro do olhar, isto é, a imagem é semelhante ao olhar (Sogabe 1996). Inicialmente, as imagens e as estruturas geométricas que organizavam as nossas representações em desenhos e pinturas, eram executadas somente com técnicas artesanais e manuais.

“Os estudos preparatórios dos elementos utilizados em suas pinturas [Leonardo da Vinci], como os das pesquisas de plantas para ‘Leda and the Swan’ (Meyer, 1989), foram os resultados de uma observação apurada da natureza e de um registro preciso das plantas, nos mínimos detalhes. Esses registros, buscando uma fidelidade maior com o real, iniciam também a necessidade de um olhar mais minucioso sobre a natureza revelando, em consequência, novos conhecimentos” (Sogabe 1996: 62).

É trivial deduzir que as imagens encontradas desde a pré-história até recentemente, passando pelos egípcios, babilônios e gregos, possuem características topológicas e a capacidade de representar quantidades, mensurar proporções ou, até de, simplesmente, identificar padrões de repetição estilizados nas formas que apresentam. No Parque Nacional da Serra da Capivara, no Brasil, encontramos grafismos rupestres que nos possibilitam constatar que as imagens produzidas pelo homem pré-histórico, no sítio arqueológico de São Raimundo Nonato, no Piauí, contêm elementos que permitem inferir sobre relações de dimensionalidade, proporcionalidade e espacialidade das imagens. Os animais e seres humanos representados, mesmo aqueles mais estilizados, possuem proporções facilmente identificáveis nos traços, que mostram a intenção em quantificar e mensurar as figuras humanas e animais em suas representações.



Figura 1_1 - Pintura Rupestre - Grande Cervo – Toca do Salitre. 8000 – 7000 a.C., Piauí, Brasil. In Peintures préhistoriques du Brésil, de Niède Guidon, Hérisséy – Érreux, France,1991, p.57.

A partir da pesquisa de Niède Guidon (1991), as representações rupestres existentes no Parque Nacional Serra da Capivara estão cronologicamente distribuídas em: Tradição Nordeste (12.000-6.000 anos BF - Before Present), Agreste (6.000-4.000 anos BP) e Geométrica (5.000-4.000 anos BP) e duas de gravuras: Itacoatiaras do Leste e Itacoatiaras do Oeste (Guidon 1991). Nas representações da Tradição Geométrica, caracterizadas por uma predominância de grafismos topológicos, que, para nós ocidentais, representam formas e figuras geométricas, como círculos, triângulos e retângulos, vamos encontrar uma tendência à “*geometrização*” e um grafismo abstrato e topológico.

Estas representações “*geométricas*” carregam, em si, uma grande variedade de possibilidades interpretativas, por isso, hoje são vista com muito cuidado em relação ao que significam. Estas características à “*geometrização*” também podem ser encontradas nas representações da Tradição Nordeste e Agreste neste sítio arqueológico. Porém, num estudo mais detalhado sobre elas, realizado por Martin (1997), vamos encontrar, associados a estes grafismos “*geométricos*”, relações espaço-corporais, sistemas de contagem, relações com os corpos celestes e com os calendários lunares.

Anne-Marie Pessis (1987) comenta que neste sítio arqueológico do Parque Nacional Serra da Capivara, convém fazer uma distinção entre as formas gráficas de representação que mostram as profundidades espaciais e as que não mostram. A construção de cada uma delas é relativa ao objeto tridimensional e trata das projeções sobre o plano, tomando como base um objeto em relação ao outro e suas profundidades. É possível afirmar que a representação dos objetos se dá através da representação gráfica associada a certos fatores estruturais da visualidade e dos modos de representação bidimensional.



Figura 1_2 - Pintura Rupestre - Cena de Sexo – Toca do Caldeirão do Rodrigues I. 8000 – 7000 a.C., Piauí, Brasil. In Peintures préhistoriques du Brésil, de Niède Guidon, Hérisséy – Érreux, France,1991, p.59.

A representação em perspectiva aparece, na história do homem, somente com os Egípcios, Babilônios, Gregos e Etruscos, e os resultados gráficos são soluções que ressaltam a tridimensionalidade das formas (Pessis 1987: 68). Em certas composições das representações rupestres da Tradição Nordeste, a relação sexual que é representada mostra parceiros que recebem o mesmo tratamento no espaço topológico gráfico. A composição é feita segundo um ponto de vista que expõe a identidade sexual dos dois atores e sua relação sexual. As rochas que são os suportes destas pinturas mostram que as figuras humanas são desenhadas como se estivessem na superfície do solo, na qual as duas pessoas interagem sexualmente.

“O estudo dos grafismos de ação da Tradição Nordeste permite constatar que, segundo as modalidades estilísticas, os autores recorrem às diversas soluções para estabelecer as relações de profundidade entre os elementos da composição pictural. Vemos várias formas de tratamento do espaço e da representação de profundidade entre os componentes do agenciamento pictural. Um destes procedimentos consiste na superposição de diferentes planos paralelos horizontais aos quais são dispostos componentes de uma representação, de tal sorte que parece achatado sobre o plano bidimensional, a percepção da profundidade exige do observador um ato imaginário de destacamento da figura. A partir desta operação de base, os procedimentos utilizam os recursos de obliquidade que contribuem para produzir uma verdadeira percepção de profundidade, pois significa um crescendo e decrescendo, do momento que é visto, como um desvio ou aproximação gradual da posição estável da verticalidade e horizontalidade” (Pessis 1987: 69).



Figura 1_3 - Pintura Rupestre - Detalhe de Cena Cotidianas – Toca do Boqueirão do Sítio da Pedra Furada. 5000 – 3000 a.C., Piauí, Brasil. In *Peintures préhistoriques du Brésil*, de Nièd Guidon, Hérissé – Érreux, France, 1991, p.106.

Nestas formas de representação gráfica podemos constatar claramente as estruturas lógico-matemáticas de caráter topológico que são necessárias para elaborar estes desenhos. Apesar delas serem realizadas sobre as pedras, que são suportes tridimensionais, podemos vê-las como representações bidimensionais que, facilmente, seriam realizadas em folhas de papel. Elas exigem uma concepção do espaço topológico que, certamente, tem dimensionalidade e proporcionalidade. Estas são características das estruturas lógicas e matemáticas destas imagens. Estes registros cravados nos diversos tipos de suportes usados na pré-história possuem estruturas topológicas e, portanto, lógicas e matemáticas, ao serem elaborados.

Na próxima figura podemos ver uma das mais belas representações com imagens de homens, animais e muitas formas repetidas, mostrando as noções topológicas nas quais podemos identificar a espacialidade corporal e sistemas de contagem e quantificação. Esta imagem, realizada na Toca do Boqueirão do Sítio da Pedra Furada, em São Raimundo Nonato, no Parque Nacional Serra da Capivara, foi produzido por Marcelo da Costa Souza, que utiliza recursos computacionais para digitalizá-la. O processo de obtenção desta imagem e seu tratamento gráfico, através dos meios de produção eletro-eletrônicos, suscitam uma série de possibilidades interpretativas, pois, somente assim, podemos observar elementos que, apenas são possíveis com o uso dos computadores. Este processo permite uma ampliação da resolução gráfica da imagem que só é limitada pelo tamanho do arquivo a ser gravado no computador, isto é, extrapola a limitação da resolução gráfica do processo fotográfico. Com isso, podemos identificar imagens gravadas nas pedras que a olho nu não seriam possíveis de serem visualizadas.

1.2. Aspecto relativo à práxis

Às vezes são imagens e representações bidimensionais, outras vezes são esculturas e peças tridimensionais; enfim, há uma grande variedade de suporte para representar as imagens criadas pelos homens. Observemos agora os chapéus côncavos e convexos dos índios norte-americanos do noroeste do Pacífico. Os côncavos foram realizados pelos índios Makan e outros povos Nootka, e os convexos pelos Tlingit, Haida e Kwakiutl. Nas imagens extraídas do livro *“O poder dos limites: harmonia e proporções na natureza, arte e arquitetura”* (Doczi 1990: 14), verificamos que os índios americanos, ao elaborarem suas cestas, utensílios domésticos e vestimentas, fundamentam seus modelos topológicos de representação no ato da elaboração de seus objetos de uso diário. Suas imagens são produzidas na construção dos objetos de palha e nas imagens colocadas sobre eles.

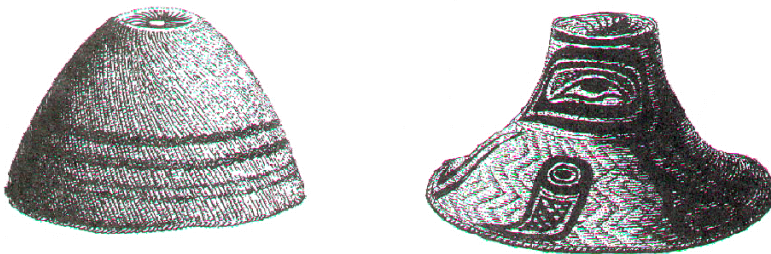


Figura 1_4 - Chapéu Côncavo e Convexo dos Índios Americanos. In *O Poder dos Limites: Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura*, de György Doczi, Editora Mercuryo, São Paulo, 1981, p.14.

“As aranhas tecedeiras constroem suas teias começando por fios retos que juntam no centro. Em seguida, tecem espirais ao redor desses fios, que vão-se alargando em órbitas cada vez mais amplas. Cesteiros trabalham em um padrão dinérgico semelhante. Inicialmente fibras duras, a urdidura, são amarradas em um ponto que será o centro do cesto. Em seguida, fibras flexíveis – a trama – são trançadas por cima e por baixo da urdidura, de forma rotativa.”

Em cestos feitos em caracol, uma fibra resistente, porém flexível, toma lugar da urdidura reta; ela é cosida, ao longo das linhas radiantes, com uma trama fina, com auxílio de uma agulha. Por causa da natureza dinérgica do processo de trabalho, é fácil reconstruir os contornos de um cesto” (Doczi 1990: 14-16).

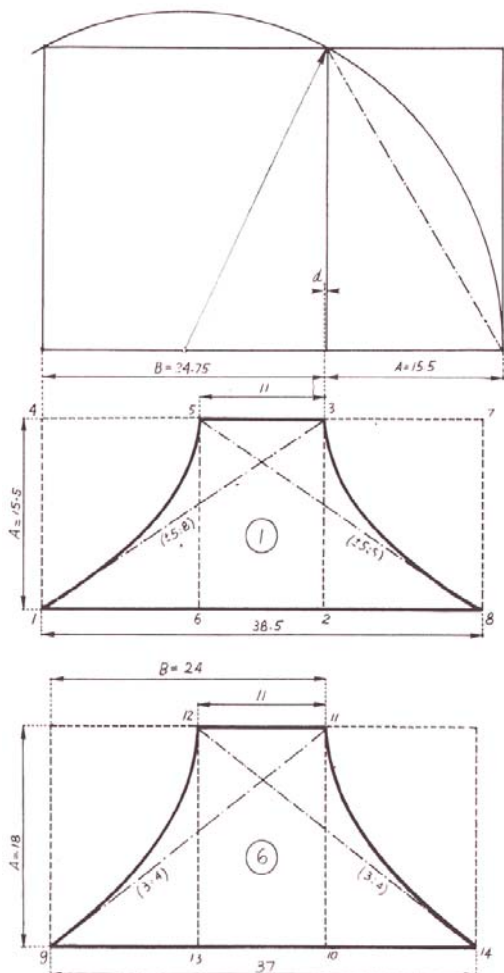


Figura 1_5 - Análise proporcional de chapéus trançados do tipo convexo. In *O Poder dos Limites: Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura*, de György Doczi, Editora Mercury, São Paulo, 1981, p.16.

Doczi afirma que nos chapéus côncavos podemos encontrar relações como as proporções áureas e nos chapéus convexos relações como o Teorema de Pitágoras. Estas estruturas lógicas podem ser identificadas nos esquemas diagramáticos dos chapéus elaborados ao lado que mostram as formas dos chapéus trançados, reconstruídas pelo método dinérgico de raios e círculos (Doczi 1990: 16).

Estas tramas e urdiduras nos remetem às similaridades e simetrias que sempre buscamos ao observar objetos. O próprio texto de Doczi aborda as proporções encontradas nas mantas cerimoniais dos Chilkat, em seus mínimos detalhes. Nestas mantas está representada uma sucessão de olhos e de formas ovóides, que também são encontrados nos chapéus, de modo esquemáticos e estilizados. É óbvio que estas formulações e relações lógicas matemáticas dos modelos com base em proporções e no Teorema de Pitágoras não foram utilizadas pelos índios norte-americanos, porém, alguns procedimentos lógicos, matemático e topológico, semelhantes aos utilizados nas imagens rupestres são necessários na construção destas peças artesanais.

Abandonando um pouco estas representações aparentemente livres do rigor da cultura ocidental para os procedimentos matemáticos, vamos retomar o pensamento de Ubiratan D’Ambrosio e constatar que em muitas civilizações do passado, como as dos astecas, dos maias, dos incas, das que habitaram as planícies da América do Norte, da Amazônia, da África subequatorial, dos vales dos Indus, do Ganges, do Yang-Tsé e da Bacia do Mediterrâneo, desenvolveram importantes formulações no campo da matemática. Introduzindo o próximo aspecto que queremos observar neste texto, as questões lógicas dos modelos matemáticos.

A civilização egípcia, que à cerca de 5.000 AP (antes do presente), deu origem a conhecimentos utilitários e especiais na matemática (D’Ambrosio 2000: 34), está baseada em representações que tratavam das medidas das terras e de aspectos relativos à astronomia. Os egípcios constataram que as inundações do Rio Nilo ocorriam depois que Sirius, a estrela do cão que aparecia a leste, logo após o nascer do Sol (Boyer 1974: 9). Após 365 dias, esta situação de alagamento das terras do Egito, voltava a acontecer e, assim, os egípcios elaboraram um calendário solar que avisava sobre as inundações. Eles utilizaram procedimentos matemáticos de registro do tempo e praticaram uma matemática utilitária, assim como os povos da margem superior do Mediterrâneo, os gregos, que também praticaram o mesmo tipo de matemática,

“mas ao mesmo tempo desenvolveram um pensamento abstrato, com objetivos religiosos e rituais. Começa assim um modelo de explicação que vai dar origem às ciências, à filosofia e à matemática abstrata. É muito importante notar que duas formas de matemática, uma que poderíamos chamar de utilitária e outra, matemática abstrata (ou teórica ou de explicações), conviviam e são perfeitamente distinguíveis no mundo grego” (D’Ambrosio 2000: 35).

Nosso objetivo ao abordar aspectos matemáticos de momentos precedentes aos da cultura ocidental e de culturas diferentes da nossa, não é de reconstruir a história da matemática ocidental ou outra qualquer que seja, mas simplesmente, de apresentar alguns reflexões sobre as imagens e as matemáticas produzidas por estas culturas. Poderíamos, ainda, estar destacando aspectos matemáticos da Grécia e de Roma, no tempo de Platão e Aristóteles, ou analisar profundamente *“os elementos de Euclides”*, ou ainda mais, tecer comentários sobre os trabalhos realizados por Pitágoras e seus seguidores, enfim, observar os vários momentos da história e da matemática da Antigüidade. No entanto, preferimos abordar alguns temas, aparentemente isolados, porém totalmente conectados pela forma de produção do pensamento humano, baseado na filosofia peirceana, que nos conduziram à *“etnomatemática”* (D’Ambrosio 1990, 2000). Devemos notar que fizemos estas observações com olhos ocidentais, o que não poderia ser diferente, já que somos parte desta cultura.

1.3. Aspectos lógicos

O último aspecto a ser analisado de culturas e etnias não ocidentais, é relativo às relações geométricas obtidas na construção das carteiras de mão trançadas, chamadas de *“sipatsi”*, da Província de Inhambane, em Moçambique. Paulus Gerdes e Gildo Bulafo mostram-nos as cestarias moçambicanas produzidas e os padrões geométricos de construção das tramas dos *“sipatsi”*. O seu texto, *“Sipatsi: tecnologia, arte e geometria em Inhambane”* (1994) que tomaremos como base para estes comentários, expõem a forma de se construir carteiras de mão trançadas, aproveitando os princípios lógicos das tramas.



Figura 1_6 - Carteira trançada de mão - Siptasi.

In SIPATSI Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane, de Paulo Gerdes & Gildo Bulafo, Imprensa Globo, Maputo, Moçambique, 1994.

A coleta de dados com as cestarias e os cesteiros, para a realização do trabalho de análise das formas geométricas construídas nos *“sipatsi”*, de Moçambique, foi realizado nos distritos de Morrumbene, Maxixe e Jangamo, na Província de Inhambane. Segundo Gerdes e Bulafo, a execução das cestarias é um trabalho originariamente feminino. As mulheres também se dedicam ao cultivo das machambas, à pesca do camarão, à cozinha, ao transporte de água e à educação das crianças. Os homens se dedicam à pesca e à construção de casas. Porém, hoje, com a necessidade de aumentar a renda das famílias e o grande interesse despertado por este tipo de artesanato, tem aparecido vários cesteiros que se dedicam profissionalmente à execução das tramas e urdiduras das carteiras *“sipatsi”*.

A grande maioria dos padrões de fitas dos *“sipatsi”* é produzida baseando-se nas relações simétrica possíveis nas tecelagens. As carteiras e as cestas são construídas a partir de uma torção de 45° ou

135°, com simetria axial, isto é, o eixo utilizado para elaboração das figuras obedece a perpendicularidade das faixas. Esta é uma das formas de elaborar as peças de palha fina e maleável de um tipo de palmeira. Segundo Gerdes e Bulafo são vários os padrões de tecelagem elaborados pelos moçambicanos, porém, as tramas respeitam um padrão de simetria definida no plano bidimensional e suas possibilidades de execução limitada pela necessidade de trançar.

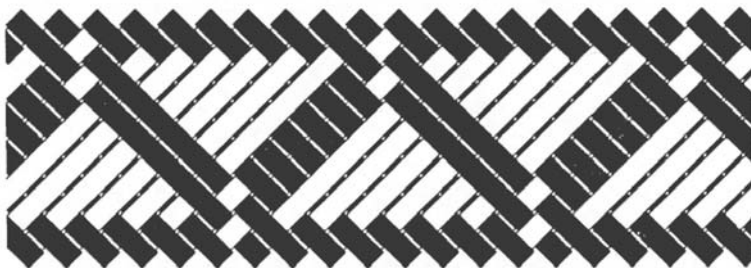


Figura 1_7 - Modelagem possível em carteiras trançadas de mão - Siptasi. In SIPATSI Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane, de Paulo Gerdes & Gil do Bulafo, Imprensa Globo, Maputo, Moçambique, 1994.

Para Gerdes e Bulafo, o eixo indicado na figura acima é perpendicular à direção da fita.

“Geralmente diz-se que um padrão-de-fita com eixo de simetria, perpendicular à direção da fita, apresenta uma simetria vertical. O padrão é invariante sob uma reflexão no eixo vertical. A palavra vertical é adequada se o livro em que se encontra a figura estiver numa posição vertical, por exemplo, colocado num estante: quando estiver assim, é de fato vertical” (Gerdes & Bulafo 1994: 79)

Existem vários eixos verticais encontrados nas formas tramadas. Poderíamos dizer ainda, que os eixos de simetria são infinitos, já que as representações são fitas e poderiam se prolongar indefinidamente se assim o desejássemos. Este é apenas um dos exemplos das simetrias encontradas nas “*sipatsi*”, pois como as formas geométricas são construídas nas tramas e urdiduras das palhas tecidas, facilmente compreendemos que os desenhos e formas sempre obedecem às direções 0°, 45°, 90°, 135° e 180°, obrigatórias na execução das tranças do “*sipatsi*”.

A noção de simetria nas figuras geradas por este sistema de representação geométrica das carteiras de Moçambique, é um modelo determinado fundamentalmente pela lógica da trama das fitas de palha. E, de fato, os axiomas lógicos que definem os modos possíveis de construção das formas geométricas das carteiras, são elaborados diante do ato de se tramar as próprias produções realizadas em tecelagem.

Verificamos que a série de figuras gerada através dos paralelogramos dentados é equivalente a oito por treze, ou seja, oito tiras oblíquas, sendo cada uma delas composta por treze quadrados. Isto forma um período fixo no qual os desenhos produzidos se repetem e, assim, as formas são confeccionadas nas possibilidades desta estrutura. No final do livro de Gerdes e Bulafo elaboraram as possibilidades de padrões das fitas para dimensões 2X3, 2X4, 4X3, 5X3 e 3X4 mostrando que os padrões que formam são em número limitado em função da relação que adotamos para os quadrados horizontais e verticais. Já em outro livro, “*Explorations in ethnomathematics and ethnosciences in Mozambique*” (1994), organizado por Paulus Gerdes, vamos encontrar vários autores refletindo sobre as questões matemáticas e educacionais relativas às ciências nas produções africanas do século 21. Todos os textos abordam a ciência “*etnomatemática*” e aspectos matemáticos da linguagem e da aritmética mental dos africanos, em especial, sobre a cultura realizada em Moçambique.

2. As imagens e a matemática na cultura ocidental

Já, na cultura ocidental, podemos verificar que as imagens sempre estiveram associadas às formas de elaboração do conhecimento humano. Constantemente somos obrigados a recorrer a elas para melhor observar o comportamento dos modelos que queremos construir. Planejar é sinônimo de elaborar modelos, diagramas, desenhos, esboços, enfim, imagens mentais e visuais que possibilitem antever situações.



Figura 2_1 - Detalhe do lamento ante Cristo Morto, de Giotto (1304/6). In *Gênios da Pintura - Giotto*, de Victor Civita (ed.), Abril Cultural, São Paulo, 1968, p.22-23.

A partir da Idade Média, começando pelas pinturas de Giotto e pela revolução científica realizada por Galileu, a cultura ocidental começou a planejar tudo ao seu redor. A representação de figuras através das diferentes formas perspectivas fez com que tivéssemos a capacidade de representar, numa superfície plana, elementos geométricos simulando três dimensões. Em particular, gostaríamos de destacar os trabalhos elaborados a partir do Renascimento, mais especificamente, as produções artísticas realizadas depois do artista plástico Ambrogio di Bonone, conhecido apenas por Giotto, que nasceu por volta do século XIII. Suas pinturas consagravam um modelo teórico e lógico matemático realizado por volta do século III AC, conhecido como os "*Elementos de Euclides*" e que, hoje, é reconhecido como tendo sido o primeiro trabalho de axiomatização dos signos matemáticos. A geometria euclidiana pode ser visualizada nas pinturas realizadas a partir de Giotto.

A partir do século XIII podemos simular e planejar os ambientes que imaginamos através de imagens produzidas pelo modelo euclidiano. Segundo Edgerton (1991: 12), três são os aspectos que modificam nosso paradigma de percepção nesta época: um político, um religioso e um matemático. Para ele, os fatores que contribuíram para as grandes mudanças a partir do período renascentista foram: a política de rivalidade nos estados-cidades sustentada por uma economia capitalista burguesa mercantilista; o conceito ético religioso de "*leis naturais*" concebido a partir de um grande modelo fixado "*a priori*", que admitia a existência de um "*Deus*" único e, finalmente, uma filosofia para a pintura, que adotava princípios baseados em uma estrutura fundamentada no modelo axiomático e matemático da geometria euclidiana (1991).

Escolhemos o ciclo materialista industrial ocidental, obviamente, porque é dele que emanam nossos valores, fundamentados na matéria e na forma de produzir da cultura ocidental, assim, o modelo que adotamos para analisar estes dois tipos de signos estão apoiados nos meios de produção pré-industrial, industrial mecânico e industrial eletro-eletrônicos, que analisaremos a seguir. Não seguimos rigorosamente uma segmentação histórica, uma vez que entendemos que as mudanças de padrões e paradigmas não ocorrem instantaneamente, nem deixam de existir na passagem de um ciclo a outro, verificamos que tudo deve ser estruturado de maneira orgânica, não como um mundo com valores que tenham tido momentos de ascensão, apogeu e decadência.

De fato, ainda hoje, nossa cultura está impregnada pelo paradigma cientificista sustentado no modelo cartesiano, que tem como principais fundamentações teóricas os pensamentos de Descartes, Newton e Bacon. Para eles, qualquer sistema, por mais complexo que fosse, poderia ser compreendido a partir das propriedades das partes e, automaticamente, a dinâmica do todo se explicitaria. Acreditamos hoje numa evolução e que nossos sistemas são como “*holarquias*” (Laurentiz 1991), onde

“... parte e todo deixam de ter sentidos isolados e passam a compor um sistema único, íntegro e coeso O modo de pensar oriental, com sua maneira intuitiva de estabelecer valores, aponta na mesma direção quando afirma que "o caminho e caminhante são fundamentalmente uma coisa única formando um todo, onde o primeiro não existe isolado do segundo, e muito menos esse longe do primeiro” (Hildebrand 1994: 14).

Cada ciclo aqui citado faz parte da evolução de um modelo que, antes de ser determinado, é um processo de investigação científica, onde acreditamos no caminho percorrido em busca das verdades mais do que em sua definição absoluta. Quando da elaboração de nossa dissertação de mestrado, tínhamos em mente um princípio fragmentário claramente cartesiano, sabíamos ser difícil abandoná-lo por completo, uma vez que nossos princípios eram frutos deste modelo. Hoje, não totalmente desvinculados das formulações de Descartes, acreditamos em um modelo com valores mais harmônicos baseado na obra e filosofia de Charles Sanders Peirce.

2.1. O ciclo pré-industrial

Nossas reflexões começam no momento em que tínhamos uma percepção relacionada aos valores místicos da cultura medieval e à crença que tudo era orientado por leis naturais estabelecidas por algo superior a nós; acreditávamos em um Deus onipotente e onipresente. De outro lado, tínhamos a crença que, o sistema geométrico conhecido, com bases na teoria do matemático Euclides, fosse um sistema lógico divino organizado por leis da natureza e do pensamento humano. Nossos sensores eram apenas nossos órgãos sensitivos. Os nossos olhos, mãos e mentes estavam a produzir conhecimentos calcados nas particularidades dos indivíduos. A vida do campo nos fazia conviver com as forças da natureza e para suportá-las éramos obrigados a respeitá-las, admitindo-lhes um caráter místico.

Nas artes plásticas a perspectiva linear com apenas um ponto de fuga resumia uma situação, na qual a obra de arte é uma parte do universo, como ele era observado, ou, pelo menos, como deveria ser observado, na percepção de um indivíduo, isto é, a partir de um ponto de vista subjetivo, num momento particular. Dürer, parafraseando Piero Della Francesca, afirmava que “*primeiro é o olho que vê; segundo, o objeto visto; terceiro, a distância entre um e outro*” (Panofsky 1979: 360). No final deste período, haviam sido construídas três formas de se pensar a ciência do espaço e dos números, todas elas baseadas em uma visão geométrica intuitiva fundada na observação, isto é, numa percepção matemática euclidiana espacial. A produção artesanal imprimia as marcas individuais do produtor no objeto criado, fundamentalmente no ciclo pré-industrial. Percebemos também que todas as teorias matemáticas olhavam para o seu objeto de estudo pelo aspecto geométrico e euclidiano com bases na observação pura e simples de nossos sensores naturais. Isto é, o espaço topológico utilizado pelos pensadores sustenta-se numa métrica plana dada, sem quaisquer instrumentos auxiliares. De modo que, nesse período, a visão sistêmica dos espaços topológicos matemáticos e artísticos era dada pela percepção intuitiva humana sem ferramentas de avaliação; o que valia era o olho e a nossa percepção individual.

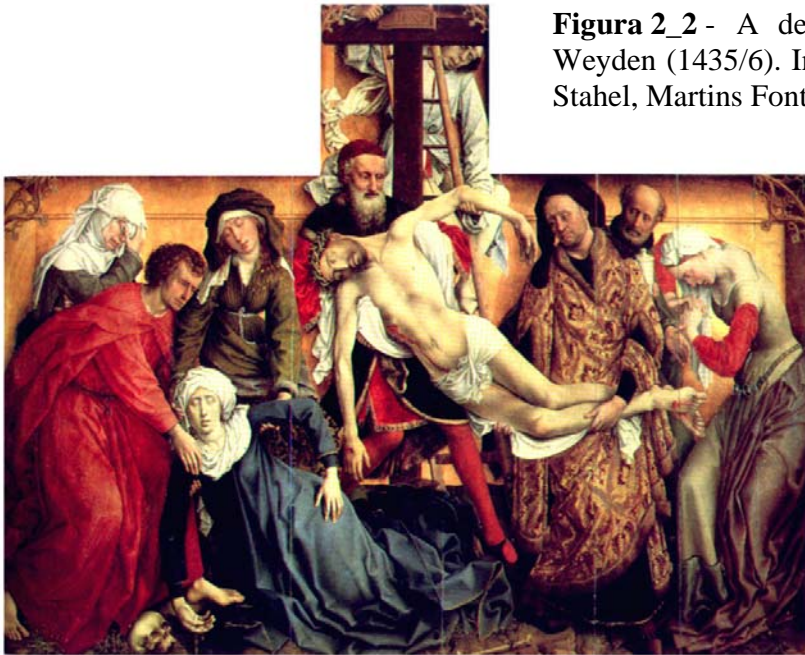


Figura 2_2 - A descida da cruz, de Rogier Van der Weyden (1435/6). In O livro da arte, tradução de Monica Stahel, Martins Fontes, São Paulo, 1996, p.491

A arte era medida e ordem quando estabelecia as relações de proporcionalidade no mundo, na arquitetura e nas representações das figuras humanas. As ordens: dórica, jônica e coríntia são exemplos deste tipo de princípio utilizado em nossas representações pictóricas no período pré-industrial. Estávamos diante de formas de representações baseadas no sistema perspectivo linear e o senso comum era a simetria, o equilíbrio, a ordenação e a mensuração.

A matemática, na tentativa de estabelecer uma projetividade espacial, operava sobre conceitos semelhantes aos dos artistas, isto é, apesar de tentar representar as formas geométricas de maneira espacial, não ia além de uma convenção planimétrica do espaço, concebendo assim, um sistema de ordem e medida calcado na deformação dos objetos e em sua projeção sobre um plano. Para Giles Gaston Granger, o matemático Desargues tinha um método de projeção e de construção perspectiva que era uma *transformação* e que permitia passar do espaço ao plano. Porém, de fato, era apenas uma deformação particular dos comprimentos. Por outro lado, ainda segundo Granger,

"o matemático Descartes dizia que "os problemas de geometria facilmente podem ser reduzidos a termos tais que, depois disso, só haveria necessidade de conhecer o comprimento de algumas linhas retas para poder construí-los" (Granger 1974: 64).

É evidente que quando Desargues e Descartes referiam-se a comprimento, importam-se apenas com as distâncias que se desdobravam em duas direções, comprimento e largura; remetendo-nos definitivamente ao plano. Se verificarmos as obras destes dois autores, como também dos outros matemáticos contemporâneos a eles, nós notaremos que a percepção espacial matemática da época era fundamentalmente bidimensional. Eles definiam conceitos e operavam com modelos que tinham suas bases em signos geométricos extraídos da antiguidade clássica. A geometria e suas projeções, tanto na arte quanto na matemática, eram de concepção euclidiana; a única forma conhecida de representar o mundo através das imagens visuais nas pinturas e de interpretar os espaços matemáticos.

2.2. O ciclo industrial mecânico

Obviamente essa percepção foi sofrendo sucessivas modificações, estes valores lentamente transformavam-se. Nossos paradigmas passavam a estar fundamentados nas qualidades físicas e químicas da matéria e nos levavam a pesquisar a lógica das relações da natureza. O homem deixava de ser passivo e iniciava um processo imposição de relações lógicas ao universo que o cercava. O sistema artesanal de produção gradativamente dava lugar à produção em série, imprimindo cada vez mais velocidade ao nosso sistema produtivo e conseqüentemente à nossa percepção.

Nossos sensores, antes baseados na díade olho-mão, passam a estar apoiados agora na díade homem-máquina. Dividíamos com as máquinas a autoria dos produtos criados. A partir desse ciclo, fomos obrigados a especializar-nos em áreas de conhecimento, já que, somente assim, acreditávamos poder conhecer o universo que nos cercava. Neste momento, segmentávamos tudo, o conhecimento se fazia pela compreensão das partes e a união delas nos levaria a compreensão do todo de nosso sistema produtivo. Fragmentávamos e imprimíamos velocidade ao conhecimento, a produção e a percepção.

Por outro lado, a racionalidade levada ao extremo produzia um pensamento calcado no inconsciente humano. Num primeiro instante, isso parecia ser contraditório, porém, passávamos a não ficar nada surpresos, ao admitir que os sonhos diziam muito mais ao nosso respeito do que poderíamos perceber conscientemente. O homem via que a máquina lentamente passava a ser um importante meio de produção e assim, conforme Walter Benjamin, consolidava-se a industrialização mecânica como período da "*reprodutibilidade técnica*" (Benjamin 1987: 170). Ao implantar-se o novo processo de produção de bens, onde o trabalho das máquinas acrescenta velocidade ao sistema produtivo, redirecionamos nossas percepções e ações no mundo. Os produtos eram executados um a um, para um determinado patrono e ganhavam novas características, assim; a civilização industrial introduzia a serialidade em seu sistema produtivo.

Nas artes podemos verificar que Pieter Bruegel estava preocupado com a vida dos povos humildes e os costumes populares. Já Caravaggio colocava São Mateus como cobrador de impostos dentro de uma taberna, tratando os temas sagrados cotidianamente. David retratava Marat, chefe político da revolução francesa, assassinado dentro de uma banheira por sua secretária. Goya expunha a família de Carlos IV a uma situação de deboche, pintava todos os membros da família real como se fossem um bando de fantasmas e ainda, destacava o rei, dando-lhe a cara de ave de rapina. Ingres, com o mesmo realismo de David, pintava o burguês Louis Bertin em uma tela com grande profundidade psicológica. E assim, vemos que todos os artistas plásticos estavam a mudar e inovar em suas produções.

De outro lado, procurando compreender a luz enquanto fenômeno em si, a fotografia passava a capturar o momento real vivido, enquanto a pintura tentava compreender, conceitualmente, como se comportava a luz diante dos olhos. Nasceram os movimentos artísticos: impressionista, pós-

impressionista, expressionista e pontilhista. Eles poderiam ser sintetizados nas obras de Manet, Monet, Degas, Renoir, Van Gogh, Gauguin, Paul Signac, Toulouse-Lautrec e George Seurat, que, entre outras formas de significar, estavam tentando representar o que poderia ser a captura do efêmero, do imaginário, da tensão, do movimento, da luz e do instantâneo em suas pinturas.

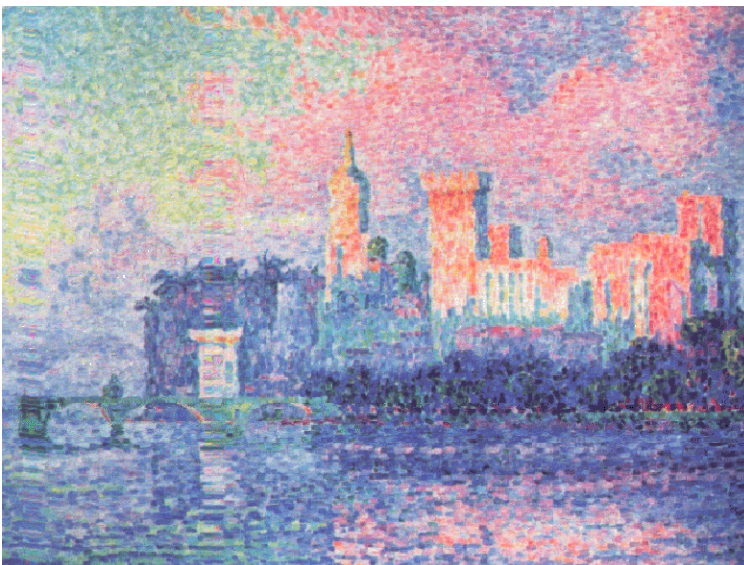


Figura 2_3 - O palácio papal de Avignon, de Paul Signac (1863). In O livro da arte, tradução de Monica Stahel, Martins Fontes, São Paulo, 1996, p.430.

Nem bem chegávamos ao ápice da industrialização mecânica, caminhávamos em direção ao seu esgotamento através dos movimentos cubista, concretista, futurista e suprematista. Todos tendo como tema central o abstracionismo, isto é, os artistas queriam suas obras representando a si mesmas, sendo o puro real e não mais a representação de algo. A obra em si passava a ser o próprio objeto real e concreto, nada representava a não ser ela mesma.

Voltando nossa atenção para a matemática, verificamos que ela estava preocupada com a teoria das probabilidades, refletindo as certezas e incertezas deste universo, que, a partir deste momento, passa a ser percebida em constante movimento e diante de uma infinidade de contradições. A teoria das incertezas observava os eventos pelas repetidas vezes que eles ocorriam, traduzindo em quantidades numéricas as possibilidades de ocorrência de um fenômeno. Ao analisarmos estas questões na probabilidade e no cálculo diferencial e integral éramos conduzidos ao seio da percepção sistêmica na matemática, uma das principais questões da modernidade. Esse conceito, se levado às últimas conseqüências, mostrava-nos a dialética tomando corpo, também, na matemática.

A análise diferencial e integral, desenvolvida nesta época, fundamentava o pensamento de quase todos os matemáticos, inclusive do físico Newton. A matemática chega a uma consistência sistêmica tão profunda, que o Euler, com apenas uma fórmula, conseguiu compatibilizar quase toda a matemática conhecida até aquele momento. Esta expressão algébrica reuniu em seu interior princípios do cálculo diferencial e integral, da teoria das probabilidades, da teoria das séries, da teoria das funções, da álgebra e também da filosofia matemática (Davis 1985: 232).

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \cdot \text{sen} \pi = -1 \quad \text{ou} \quad e^{\pi i} + 1 = 0$$

Todos os ramos do conhecimento matemático, de algum modo, eram expressos nessa fórmula. Além disto, ela possuía uma áurea misteriosa muito grande, pois conseguia abrigar em seu interior a relação entre as cinco constantes mais importantes de toda a análise matemática: e , π , i , 0 e 1 (Granger 1974: 88). Neste momento, para melhor compreender o princípio sistêmico que toma conta do raciocínio matemático e a busca de uma unidade estrutural em toda esta ciência, observemos a história da geometria euclidiana e de seus cinco axiomas. Ela conta-nos que, desde Euclides e de sua axiomatização da geometria em “*Os Elementos*” os matemáticos procuravam esta mesma estrutura para as outras formas de produção de conhecimento no mundo dos números.

Desde os gregos, os estudos realizados sobre os cinco axiomas de Euclides, sempre confirmaram a consistência deste sistema. Isto perdurou até o final do século XIX. O quinto axioma de Euclides, o mais conhecido deles, definia o conceito de retas paralelas. Podendo ser enunciado sem nenhum rigor matemático, do seguinte modo: duas retas são paralelas quando se encontram no infinito. Os axiomas de 1 a 4 são triviais, intuitivos e tratam de conceitos geométricos de fácil percepção. Não formulam questões mais profundas sobre a geometria euclidiana. Porém, o quinto axioma, o das retas paralelas, sempre despertou o interesse de todos os matemáticos, principalmente no século XIX, que, na tentativa de deduzi-lo logicamente a partir dos anteriores, fazem nascer a geometria não-euclidiana. Isto é, a busca de provar a consistência sistêmica desta geometria levaria o homem a descobrir novos caminhos fundamentados na estrutura axiomática deste momento em diante, fundamental no desenvolvimento do conhecimento na matemática.

Conhecida como geometria imaginária, e atribuída ao matemático russo Nicolai Lobachevsky, as geometrias não-euclidianas surgem a partir da tentativa de demonstração do último axioma de Euclides.

des. Na impossibilidade de realizar essa dedução lógica encontram-se outros espaços topológicos matemáticos, conhecidos hoje como: geometrias hiperbólica e elíptica. Elas são, respectivamente, atribuídas a Lobachevsky e a Janos Bolyai e G. F. B. Riemann.

Próximo ao começo do século XX, com procedimento semelhante ao que gerou as geometrias não-euclidianas, vamos encontrar outra contradição que, junto com o paradoxo das paralelas, irá reformular os princípios matemáticos conhecidos até este instante. Georg Cantor, trabalhando na teoria dos conjuntos, em particular sobre a "cardinalidade" dos conjuntos finitos e infinitos, nos conduz à noção de infinidades em matemática e ao conceito de conjuntos não-cantorianos. Esta questão, que veremos com maior detalhe no corpo deste trabalho, deve ser observada intimamente relacionada à noção de quantidade de elementos em conjuntos e, mais precisamente, deve ser associada ao conceito de vizinhança em matemática.

Os elementos de uma série matemática infinita podem ser classificados e ordenados, isto é, podem ser colocados uns ao lado dos outros, criando uma seqüência infinita de números, determinando assim, a cardinalidade desta série. Ao construir este modelo estamos enumerando os conjuntos de números infinitos. Com a introdução destes princípios, na geometria e na teoria dos números, constatamos que os matemáticos, assim como os artistas, substituem a concepção intuitiva do espaço euclidiano, aceita há séculos, por uma concepção onde a intuição é primitivista, topológica de caráter sensível. Para o matemático Henry Poincaré, os axiomas da geometria são convenções, isto é,

"... são escolhas feitas entre todas as convenções possíveis que devem ser orientadas pelos dados experimentais, mas que permanecem livres, sendo limitadas apenas pela necessidade de evitar qualquer contradição" (Pirsig 1990: 251).

A partir da negação do quinto axioma de Euclides e da introdução do conceito de conjuntos não-cantorianos, podemos desvincular nossa percepção espacial matemática das geometrias e, assim, auxiliados pela teoria axiomática, somos levados a operar matemática e geometricamente num patamar onde as generalizações são nossa principal ferramenta. A matemática deixa de ser construída por modelos que possuem características fortemente intuitivas e passa a ser fundamentada nas teorias axiomáticas e no conceito vetorial que nos permitem construir modelos absolutamente abstratos e totalmente desvinculados do mundo real. Eles são baseados em signos, operações e estruturas, na maioria das vezes, impossíveis de serem associados às coisas da percepção intuitiva.

Por outro lado, olhando as artes plásticas, verificamos que duas formas de expressões sobressaiam. A primeira estabelecia relações com o mundo do inconsciente, e tinha, no seu principiar, expoentes como, Henri Matisse, Gustav Klimt e Oskar Kokoschka e suas pinturas retratando o "fin-de-siècle", suas angústias e distorções. Esta forma de conduta podia ser reconhecida no movimento artístico dadaísta que, através da deformação deliberada dos objetos representados, determinavam uma forma de protesto contra a civilização industrial. O movimento surrealista acreditava que suas produções eram relativas às percepções do psiquismo e que poderiam exprimir o verdadeiro processo do pensamento. Para eles, isto ocorria, independente do exercício da razão e de qualquer finalidade estética ou moral atribuída aos trabalhos (Hauser 1972: 662).

A segunda forma expressiva, denominada de arte abstrata, era expressa pelas correntes cubista, construtivista, futurista, suprematista, neoplasticista e concretista. O seu expoente inicial foi o artista Cézanne que acreditava que a arte era representação de si mesma, em seguida, na Europa, vieram Kandinsky, Picasso e Braque. Já, na Rússia, vamos encontrar a arte abstrata nos trabalhos de Malevich, Gontcharova, Rodchenko e outros. Um dos maiores expoentes desta forma de expressão artística, e

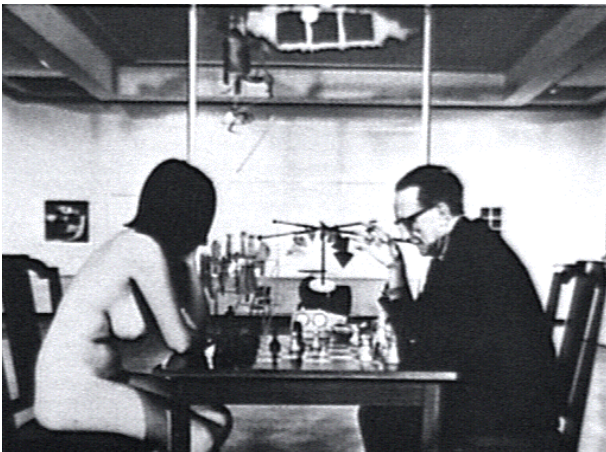
que, editava a revista *De Stijl* especializada neste tipo de arte, é o artista plástico Piet Mondrian. Para todos eles a arte abstrata era o puro real em si e não mais representação dos objetos do mundo. Ela era o próprio objeto concreto, não representa nada a não ser a si mesma.

Neste momento, junto com Lobachevsky, Janos Bolyai e Riemann, vamos encontrar o artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher, conhecido por representar os espaços geométricos projetivos ou não euclidianos (elíptico, parabólico e hiperbólico) através de suas xilografuras e litografias. As imagens produzidas por ele apresentam situações paradoxais, no entanto, factíveis de representação no plano. Ele explora os espaços infinito e as metamorfoses das representações sígnicas dos espaços geométricos não-euclidianos. Escher elabora seus desenhos e impressões representando os modelos matemáticos pensados por Moëbius (faixa de um lado só) e Klein (Garrafa de Klein).

Figura 2_4 – Pôster Waterfall, 1961
Maurits Cornelis Escher,
50 x 70 cm.



Essas duas vertentes de representação, uma marcada pelas características psíquicas e mentais e a outra pelas formas abstratas de representação pictórica, determinavam profundamente a produção nas artes plásticas no período industrial mecânico. A continuidade dessas idéias iria determinar significativamente toda a produção artística do período eletro-eletrônico. Este movimento artístico, do qual falamos, foi fundamentalmente desenvolvido na Inglaterra e nos Estados Unidos através da pop-art. Ele vai ser o primeiro de uma série de outros movimentos, marcado por uma continuidade dos princípios psíquicos e abstracionistas, do fim do período industrial mecânico. De fato, a partir deste momento, surgem vários caminhos para a arte. Efetivamente vamos ver obras sendo produzidas para a op-art, a arte conceitual, a arte-objeto, os happenings, as instalações, a video-art, a sky-art, enfim, uma infinidade de linhas de pensamento artístico, definidas de maneira bem particular em relação as suas formas de representação. Todos em busca de uma visualização da unicidade orgânica dada pela linguagem sobre a qual estávamos a produzir conhecimento.



Assim, vamos encontrar Picasso, com um grande número de obras que explicitaram suas metamorfoses... e sua fecundidade inesgotável e ininterrupta (Paz 1977: 7), apresentando uma das características marcantes da modernidade. Encontraremos a serialidade nas diversas formas de produção, inclusive nas obras artísticas. Duchamp, por outro lado, considerado por Paz como autor de uma única obra, nega a pintura moderna fazendo dela uma idéia, um

conceito, não concebendo a pintura como uma arte apenas visual. Segundo observou Octávio Paz, em seu livro "*O castelo da pureza*", a pintura-idéia e os ready-made constituíam-se em "*alguns gestos e um grande silêncio*" (Paz 1977: 8); para Paz, eram as verdades e os conceitos, nos quais Duchamp enfatizava sua crítica a sociedade em que vivia e elaborava a sua negação à pintura na modernidade.

2.3. O ciclo industrial eletro-eletrônico

O homem descobre a energia elétrica e com ela nosso paradigma de percepção altera-se novamente. Agora, apoiados nos meios eletro-eletrônicos de produção, somos atingidos em nossos pensamentos pelas diversas formas de energia, em particular pela energia elétrica que nos encaminha em direção à luz e às velocidades e os elementos que ela nos faz perceber.

A energia está presente em tudo que fazemos ou pensamos: na geração da força mecânica através das bobinas, na eletricidade que consumimos em nossas casas, no armazenamento dos dados através dos suportes magnéticos, na transmissão e recepção de informações do mundo digital, enfim, em todas as partículas do universo onde o elétron, o próton e o nêutron estão presentes. De fato, a velocidade de processamento a que somos submetidos, unidos aos mecanismos de armazenamento da informação, nos expõe às novas características e novos paradigmas. A partir de agora, velocidade, conhecimento e decisão são elementos primordiais do processo produtivo e estão incorporados aos novos meios de produção. Detém o poder quem detém as informações, e detém as informações quem detém o domínio sobre os softwares e hardwares.

Para melhor compreendermos o estágio que nos encontramos, ainda em formação, é necessário relembramos que, a memória embutida em nossos equipamentos, aliada à automação de nossas máquinas, acrescenta velocidade ao que fazemos, permitindo maior rapidez, eficiência e expondo a humanidade a uma intensa troca cultural. Logicamente estas modificações perceptivas não aconteceram de uma só vez, nem se configuram instantaneamente, as mudanças de paradigma fazem parte de um processo de observação e elaboração que define e é definido através do uso das diversas linguagens. Assim, para compreendê-lo, é necessário que retomemos valores e pensamentos da história das artes plásticas, a fim de observarmos os processos de mudança que interferem significativamente em nosso atual paradigma de percepção.

Nos Estados Unidos vamos encontrar a action painting destacando os trabalhos de Jackson Pollock sobre telas, ele utilizava os gestos e o acaso para criar seus trabalhos, assim como Duchamp, quando incorporou ao seu "*Grande Vidro*", a quebra casual de uma de suas peças centrais modificando a interpretação da obra. O artista americano, Pollock, foi um dos principais representantes da pintura gestual e afirmava que, no chão, se pintava à vontade; ali ele se sentia mais próximo da pintura; fazia parte dela; trabalhava em seus quatro lados e, literalmente, estava dentro da pintura.

Sem dúvida, nestes dois relatos vamos encontrar as marcas da energia humana e da natureza sendo incorporadas aos trabalhos de arte do período eletro-eletrônico. O ato de pintar telas no chão e os vidro quebrado do trabalho de Duchamp, estão repletos de ação, movimento e vitalidade. Pintar para Pollock significava observar sua elaboração nos vários ângulos possíveis e estando a tela no chão isto era possível. Destacando aqui, apenas a action-painting e a pop-art, dois movimentos basicamente americanos de artes plásticas. Enfim, está decretada a maioria internacional da arte americana (Janson 1977: 664), pois, o poder, a muito já lhes pertencia. Após o final da Segunda Grande Guerra Mundial, quando os americanos junto com os aliados saem vitoriosos, nós vemos crescer significativamente a produção americana, em todas as áreas de conhecimento, particularmente nas artes.

Podemos dizer que a pop-art é uma das expressões desse poder. Suas imagens e representações estão baseadas nos meios de comunicação de massa da sociedade americana. E assim, negando a negação dos “ismos”, a pop-art não é antimoderna; é pós-moderna; e ainda, contrária ao dadaísmo, não é motivada por qualquer desespero ou repulsa em relação à civilização, mas sim, pela exaltação de seus modelos. Os artistas da pop-art exaltando as reproduções em série, como por exemplo, as histórias em quadrinhos, exploram positivamente todos os valores da sociedade de consumo. A simulação do mundo real também é uma das características deste movimento de arte. Os artistas constroem objetos plásticos em tamanho natural. Os trabalhos do artista e escultor Duane Hanson que modelava as pessoas, obtinha esculturas humanas em tamanho natural e que eram verdadeiras réplicas do modelo real e, assim, as características da sociedade que produz para as massas são levadas ao extremo, só faltando-lhe a vida.

Efetivamente, as artes, desde os ready-made de Duchamp até a computação gráfica e as redes informatizadas, operam sobre idéias, conceitos e signos. As criações plásticas e matemáticas geraram objetos e estruturas concebíveis apenas na mente humana. Em co-autoria com a máquina, o homem, a partir deste instante, elabora seus signos artísticos, dando novas formas e novos significados às suas produções. Tudo se transforma em meios de comunicação. Todos os sistemas de representação são possíveis e os objetos permitem que, deles, possamos extrair todas as interpretações possíveis e imagináveis. Hoje os meios de produção são observados como linguagem de comunicação, no qual os diferentes discursos são possíveis. Concordando com Lúcia Santaella, afirmamos, que toda e qualquer interpretação depende dos referenciais que sustentam o pensamento de quem o interpreta (1990: 58).

Aqui, vamos apresentar a ligação que existe entre a nossa dissertação de mestrado (Hildebrand 1994) e nossa tese de doutorado (Hildebrand 2001). Observamos que, entre as possíveis interpretações que poderiam ser realizadas, identificamos aquelas relacionadas às estruturas lógicas de organização das linguagens visuais e suas possíveis relações com a linguagem matemática. Segundo Arlindo Machado, a codificação eletrônica da imagem é feita através de pontos e retículas de informações básicas de cor, tonalidade e saturação que aos nossos olhos aparentam realidade, mas o mundo real externo é mais que isto e nós sabemos. Ele ainda afirma, que as “*articulações de níveis abaixo da imagem*” (1984: 157), que são os píxeis das telas de televisão e dos computadores, não apresentam o mundo real, por mais próximos que pareçam dele estar. A lógica matemática, em particular a desenvolvida por Boole, estrutura nossas imagens digitais através dos bytes e de um sistema numérico binários, onde 0 e 1 representam a passagem ou não da energia pelos circuitos dos computadores, demonstrando que a visualidade gerada pelas novas mídias eletrônicas está totalmente vinculada à lógica dos modelos matemáticos.

Isto nos conduz diretamente ao mundo dos números e dos espaços que, ao refletir sobre o método axiomático, conhecido desde Euclides, definitivamente está às voltas com discussões abstratas e lógicas. Karl Weierstrass, George Cantor, H. E. Heine, J. W. R. Dedekind e muitos outros matemáticos estão formulando sobre a álgebra abstrata, a arimetização da matemática, o método hipotético-dedutivo, a teoria dos espaços de Riemann, a geometria diferencial e a evolução da lógica. Hilbert, em busca de elucidar a natureza do infinito, propõe a consistência total dos nossos modelos. No entanto, o célebre teorema da incompletude de Kurt Gödel mostra que isto não era possível de ser realizado. Os modelos tornam-se inconsistentes quando tentamos generalizá-los em suas infinitudes.

A partir desta demonstração, Gödel encerra com a proposta de Hilbert de encontrar uma linguagem e uma lógica que sirvam de formalização para todas as teorias matemáticas. E efetivamente a matemática rende-se à lógica. Neste instante surgem profundas reflexões sobre o pensamento lógico e sobre uma nova postura referente à natureza da matemática. Frege e Peirce introduziram uma fértil discussão na matemática. O primeiro acreditava que poderia deduzir a matemática da lógica e, assim, ten-

tou mostrar que todas as expressões aritméticas, portanto a matemática, poderia ser definida em termos lógicos. Para isto, ele encaminhou um raciocínio que pretendia *“mostrar que toda as expressões aritméticas significam o mesmo que uma expressão lógica”* (Peirce 1983: 183). Já para o filósofo, lógico e matemático Charles Sanders Peirce

“a verdadeira lógica está baseada numa espécie de observação do mesmo tipo daquela sobre a qual se baseia a matemática, e essa é quase a única, ou senão a única ciência que não necessita de auxílio algum de uma ciência da lógica” (Peirce 1975: 21).

Com isso, a lógica definitivamente ocupa seu espaço no mundo matemático e Tarski, Turing, Church, Zermelo e muitos outros, vão iniciar uma discussão que até hoje permanece entre nós, e que pretendemos abordar neste trabalho, qual seja: o objeto matemático refere-se a algo no mundo real? De fato, contatamos que a lógica e os modelos abstratos tomam conta das reflexões nesta ciência e, pensadores como Cauchy, Abel e Weierstrass, discutem os fundamentos de edificação desta ciência, tratando de encontrar apoios sólidos para a aritmética, a álgebra, o cálculo diferencial, o cálculo integral, enfim, toda a análise matemática. O método axiomático é o caminho lógico para a aritmetização da análise, onde, a noção de espaço vetorial transforma nosso modo de perceber, operar e pensar sobre as geometrias. A *“dissociação entre objetos e operadores”* passa a ser o principal aspecto *“para a constituição de uma estrutura vetorial”* (Boyer 1974: 94). Riemann afirma que devemos pensar a geometria sem ser por pontos e isso nos leva *“à curvatura dos espaços riemannianos”*, sem a qual a *teoria da relatividade* de Einstein não poderia ter existido. Por outro lado, o famoso *“conceito de Cortes de Dedekind”* estabelece uma separação entre a análise matemática e a geometria e, então, passamos a formular nossas teorias com bases realmente abstratas e lógicas.

Devemos lembrar, ainda, da *“teoria das catástrofes”* de René Thom, que com seus modelos estabelece a projeção do descontínuo sobre o *“real”*, um espaço imaginário que reflete sobre os modelos e sobre o princípio da continuidade. Operando sobre espaços integralmente abstratos, na teoria axiomática e nos procedimentos da lógica, os Bourbakis, grupo de matemáticos que elaboraram trabalhos em busca de uma formalização do conhecimento nesta ciência, desejou substituir os cálculos matemáticos por idéias. E assim, afirmaram que

“o que o método axiomático fixa como objetivo principal é exatamente o que o formalismo lógico por si não pode fornecer, ou seja, a inteligibilidade profunda matemática” (Boyer 1974: 457).

Na matemática, algo semelhante está ocorrendo, os conceitos e fundamentos modernos da álgebra, aliados às topologias, aos espaços vetoriais e à teoria axiomática, geram a álgebra homológica que

“é o desenvolvimento da álgebra abstrata que trata de resultados válidos para muitas espécies diferentes de espaços” (Boyer 1974: 457).

Sabendo claramente que não esgotamos todos os fundamentos, conceitos e conhecimentos matemáticos da atualidade, e nem o pretendemos fazer, dada a extensão desta área de conhecimento. Voltaremos a estes conceitos com mais profundidade no corpo de nossa tese de doutorado. No entanto, ao concluir este resumo sobre a nossa dissertação de mestrado, devemos destacar que, hoje, encontramos inúmeras formas lógicas de proceder: a lógica clássica, a lógica difusa, a lógica paraconsistente, a lógica paraconsistente desenvolvida, entre outros, pelo brasileiro Newton Costa. Enfim, encontramos inúmeros modelos lógicos que nos permitem mostrar a infinidade de interpretações possíveis que estão diante de nós, inclusive diante daquilo que acreditávamos ser única: a lógica.

Tanto na matemática, quanto nas artes plásticas, nossos sistemas e linguagens, de agora diante, colocam-se diante de uma "crise de representação" generalizada, portam-se como se estivessem esfaelados, mas, na verdade, apenas deixam claro que, através de nossa percepção, os fenômenos naturais e culturalmente construídos organizam-se segundo modelos que às vezes não estão totalmente determinados para os nossos sentidos, contudo, possuem características que possivelmente se estruturaram a partir de novos modelos de observação que concebemos, num processo contínuo de produção de conhecimento; uma metodologia de investigação científica.

Os novos meios de comunicação geram novos signos, que, por sua vez, abrem novas possibilidades de significação, e, assim, se pretendemos viver intensamente os dias de hoje, devemos estar em busca da compreensão dos significados desses signos que cada vez mais abrem suas portas à interação do homem com tudo aquilo que está ao seu redor, principalmente o que pode ser concebido em sua mente. Entre esses meios, destacamos aquele que, hoje, mais nos atingem, isto é, as novas mídias com seus "códigos de baixo nível", seus píxeis, sua lógica binária ordenada segundo Boole, estruturando logicamente modelos, algoritmos e princípios matemáticos irremediavelmente incorporados aos atuais meio de comunicação. As imagens da computação gráfica simulando objetos, que em realidade não existem, através das codificações matemáticas, conduzindo-nos aos novos paradigmas de percepção do período eletro-eletrônico. Este processo de elaboração de conhecimento permite-nos unir a produção e o consumo deste meio, num princípio único, simulando, através destas máquinas eletrônicas, ambientes que estão relativamente próximos àqueles estabelecidos pelo nosso sistema nervoso central (Mcluhan 1964: 391).

Hoje, olhando para nossas produções como elos de um processo cognitivo único, onde mente e mundo fazem parte de um mesmo ecossistema, verificamos que convivemos, intimamente, com a lógica binária e com o mundo digital e, assim, as artes e a matemática unem-se em busca de suas similaridades. O perfil produtivo do momento em que vivemos, está apoiado nos conceitos e procedimentos lógicos matemáticos de nossos equipamentos digitais e está associado aos novos modos de representação, que as diferentes linguagens de comunicação permitem. Os signos matemáticos, cada vez mais, fazem parte e organizam os fundamentos lógicos de todas as outras formas de linguagem do homem.

K. Galloway e S. Rabinowitz, 1977.

Virtual Space/Composite Image

Space Dance from Satellite Art Project.

A imagem de Mitsu, in Maryland compõem com a de Keija e Soto, na California.



C. Sommerer e L. Mignonneau, 1993.

Interactive plants growing.

Interação sensítiva com cinco plantas verdadeiras.



Bill Viola, 1992.

Rezar sem interrupção.
Instalação de Video que mostra o ciclo da vida.



J. Philippe, 1989.

Totem of the future.

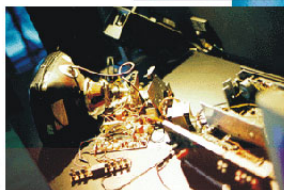
Escultura com diferentes configurações em função da temperatura ambiente.



SCIArts, 1991.

Entremeios II.

Sistema de sensores e cameras que buscam relacionar elementos do espaciais, gerando imagens.



Sterliac, 1990 - 91.

Performance Robótica para ampliação do corpo com terceiro braço.



3. Conclusão

Detém o poder quem detém os programas dos computadores, que, ao mesmo tempo em que processa o cálculo para o lançamento das espaçonaves, modela os objetos imaginados pelo homem. Através dos meios eletro-eletrônicos de produção e de sua capacidade de armazenar e processar rapidamente as informações podemos simular vários ambientes, inclusive aqueles concebidos mentalmente por nós. Hoje, acrescentamos um elemento novo às nossas elaborações lógicas, isto é, a capacidade de simular praticamente tudo ao nosso redor, inclusive aquilo que criamos em nossa mente através dos programas computacionais. De acordo com Milton Sogabe, o poder de simulação destes novos ambientes, unidos aos signos matemáticos e lógicos de nossas linguagens de programação, revelam-nos “*imagens sínteses*”, imagens em processo que

“não representam nada e não têm qualquer tipo de contato físico com algo preexistente: são apenas uma série de informações numéricas” (1996: 114).

As imagens geradas por estes meios não nascem de algum tipo de percepção visual sensível à luz, e também, não fazem referência a qualquer real existente. Cada vez mais, são simulações e representações de objetos abstratos que existem apenas em nossas mentes, assemelhando-se, em muito, aos signos matemáticos. A possibilidade de geração de um número infinito de simulações, uma das características de nosso tempo, evidencia um grande número de similaridades entre essas duas linguagens.

A partir de agora, vemos que estes signos estão relacionados às questões da visualidade das representações concebidas diante das novas tecnologias que, em suas características fundamentais, estão intrinsecamente ligados aos objetos matemáticos. Estas formas de linguagens, porque estão estruturadas em axiomas, conceitos e princípios lógicos, utilizados na matemática, são semelhantes a ela. E, de fato, o foco deste nosso artigo foi analisar quanto de matemático há nestas representações humanas, em particular, quanto de matemática há nos signos visuais gerados pelos artistas.

Encontramos vários autores analisando as imagens geradas pelas novas mídias eletrônicas como sendo: “*imagens sem olhar*” (Sogabe 1996: 113), aquelas que se concretizam a partir de processamentos numéricos dos computadores; “*imagens sintéticas*”, herdeiras ao mesmo tempo da matemática e da arte (Poissant 1997: 89), imagens que geram uma “*ordem visual numérica*” (Couchot 1982: 42), ou ainda, “*imagens em potencial*” e “*imagens sínteses*”, todas elas dando ênfase ao caráter abstrato, lógico e virtual destes modelos de representação. Apesar do grande número de textos que tratam deste tema, pelos diferentes ângulos de percepção e interpretação, verificamos em nossa pesquisa bibliográfica que existem pouquíssimos estudos discutindo as imagens, tendo como foco os aspectos matemáticos e topológicos como abordamos neste artigo.

As novas tecnologias de comunicação trazem embutidas em sua lógica de construção, o conhecimento que, fundamentalmente, está presente na ciência matemática (Hildebrand 1994: 137). Os computadores iniciaram processando informações a partir de uma lógica binária, que, em última instância, pode ser olhada como representações numéricas de impulsos elétricos, onde o *zero* representa o instante que não passa energia nos cabos e circuitos de nossas máquinas e o *um* representa o oposto disto. De fato, estamos observando um princípio lógico que dá suporte às novas mídias eletrônicas em seu nascimento, oriundas do mesmo universo simbólico que é a matemática.

Verificamos algumas modificações nestes princípios, depois da demonstração do “Teorema das Quatro-Cores” e do “Teorema de Classificação dos Grupos Finitos Simples” devemos estar atentos aos vários tipos de computação não convencionais que começam a tomar conta das nossas formas de pro-

dução. Estes novos processamentos lógicos baseados em outros princípios que são diferentes da lógica clássica, assim como, a lógica fuzzy, a paraconsistente, a quântica e a computação baseada no DNA, modificam nossos paradigmas. Entre os mais recentes choques cognitivos, dos quais nos fala Marcus, e que analisaremos neste trabalho, vamos encontrar aquele que resulta da marginalização da energia através da informação, este processo vem sendo desenvolvido pela *teoria da informação do algoritmo*, por Kolmogorov e Chaitin (Marcus 1997: 7).

Hoje podemos dizer que, diante das novas mídias e dos vários princípios lógicos que podem ser elaborados pelos nossos softwares, passamos a conviver com a possibilidade de criar novos ambientes de percepção, nunca antes vivenciados. E, assim, através dos computadores, das novas lógicas na linguagem de programação e de uma grande variedade de formas de visualizar ambientes virtuais, podemos simular situações com as *imagens sintéticas* impossíveis de serem construídas longe deste universo digital.

Ao analisar estas imagens sabemos estar lidando com uma vasta gama de conhecimento e, assim, finalizando os aspectos que queremos ressaltar neste estudo, devemos comentar que, ainda de maneira vaga e intuitiva, sabemos estar observando fenômenos que possuem um nível de complexidade muito elevado e, com características bem mais abrangentes do que podemos estabelecer neste artigo. No entanto, nosso objetivo foi o de realizar uma abordagem semiótica do signo matemático dando ênfase às questões lógicas da visualidade diante dos novos meios de produção. Assim, contribuir para atingir novos níveis de complexidade através das análises que realizaremos das representações visuais dos modelos matemáticos. Pretendemos, também, verificar neste estudo a tendência que todas as ciências tem a matematização. Para Santaella e Nöth, fundados nos pensamentos de Peirce, todas as ciências caminham para

"aumentarem gradualmente seu nível de abstração até se saturarem na matemática, quer dizer, a tendência de todas as ciências é se tornarem ciências matemáticas. O conglomerado de ciências, que hoje recebe o nome de ciência cognitiva, parece estar no caminho de comprovar essa sugestão" (1998: 90).

Assim, as imagens computacionais que são construídas e, em seguida, são destruídas para darem lugar às outras imagens que as substituíram, pois elas existem durante o tempo de processamento e de exposição em nossos sistemas de percepção, são "*imagens em processo*" ou "*imagens virtuais*" de modelos lógicos intrinsecamente ligados às novas mídias. Finalizando os aspectos que pretendemos analisar neste texto, devemos ressaltar que, de maneira secundária, mas não menos importante, devemos lembrar das imagens fractais, os grafos de modo geral e *os grafos existenciais* de Peirce que nos conduzem às belezas explicitadas nas formas e raciocínios lógicos e a estética destas formas.

As *Imagens Matemáticas* que abordamos em nossa tese de doutorado, são concepções visuais em processo que adquirem valores diferenciados quando são compreendidas relacionadas às linguagens que as geram. Observar esses aspectos associados às novas tecnologias, nos levou a conectar três realidades aparentemente distintas: primeiro a questão da visualidade destas imagens, que, através do processo criativo, expõem características diagramáticas, em segundo lugar, a questão operacional da construção da linguagem matemática em si e, em terceiro os aspectos mentais e simbólicos necessários na realização deste tipo de conhecimento.

4. Bibliografia

- BENJAMIN**, Walter (1985). *Obras escolhidas - Magia e técnica, arte e política*. Traduzido por Sergio Paulo Rouanet. São Paulo: Brasiliense.
- BOYER**, Carl B. (1974). *História da matemática*. Traduzido por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher.
- CIVITA**, Victor ed. (1968). *Gênios da Pintura*. São Paulo: Abril Cultural.
- COUCHOT**, Edmond (1982). La synthèse numérique de l'image vers un nouvel ordre visuel. *Traverses* 26, octobre.
- DAVIS**, P. J. & **HERSH**, R. (1985). *A experiência matemática*. Traduzido por João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves.
- D'AMBROSIO**, U. (2000). *Educação matemática*. São Paulo: Papirus Editora.
- ___ (1990). *Etnomatemática*. São Paulo: Editora Ática.
- DOCZI**, György (1990). *O poder dos limites: harmonia e proporções na natureza, arte e arquitetura*, trad. Maria Helena de Oliveira Tricca e Júlia Bárány Bartolomei. São Paulo: Mercuryo.
- EDGERTON**, Samuel Y. (1991). *The Heritage of Giotto's Geometry* New York: Ithaca.
- GERDES**, P. & **BULAFO** G. (1994). *Sipatsi: Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane*. Maputo, Moçambique: Globo.
- GERDES**, P. org. (1994). *Explorations in ethnomathematics and ethnoscience in Mozambique*. Maputo, Mozambique: Globo.
- GUIDON**, Niède (1991). *Pintures préhistorique du Brésil: L'art rupestre du Piauí*. França: Hérissé - Évreux.
- GRANGER**, Giles G. (1974). *Filosofia do estilo*. São Paulo: Perspectiva.
- HAUSER**, Arnould (1972). *História social da literatura e da arte*. São Paulo: Mestre Jou.
- HILDEBRAND**, H. R. (1994). *Umatemar – Uma arte de raciocinar*. Texto inédito. São Paulo: Dissertação de Mestrado apresentada no Departamento de Multimeios da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.
- ___ (2001). *As Imagens Matemáticas*. Texto inédito. São Paulo: Tese de Doutorado apresentada no Departamento de Comunicação e Semiótica da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP.
- JANSON**, H. W. (1977). *História da arte - Panorama das artes plásticas e da arquitetura da pré-história a atualidade*. Lisboa: Fundação C. Gulbenkian.
- LAURENTIZ**, Paulo. (1991). *A holarquia do pensamento artístico*. São Paulo: Editora UNICAMP.

- MACHADO**, Arlindo (1984). *Ilusão especular*. São Paulo: Brasiliense.
- MARCUS**, Solomon. (1997). The cognitive self under successive shocks. *Cadernos do CECCS - Centro de Estudos em Ciências Cognitivas e Semióticas* 2, junho. São Paulo: PUCSP.
- MCLUHAN**, Marshall. (1964). *Os meios de comunicação - como extensão do homem*, trad. de Décio Pignatari. São Paulo: Cultrix.
- NÖTH**, Winfried & **SANTAELLA**, Lúcia. (1998). *Imagem*. São Paulo: Editora Iluminuras.
- PANOFSKY**, Erwin. (1979). *O Significado nas Artes Visuais*. São Paulo: Perspectiva.
- PAZ**, Octávio (1977). *Marcel Duchamp ou o Castelo da Pureza*. São Paulo: Perspectiva.
- PEIRCE**, Charles Sanders. (1931-58). *Collected Papers*. Vols. 1-6, ed. Hartshorne, Charles and Paul Weiss; vols. 7-8, ed. Burks, Athur W. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press. Referida como CP.
- ___ (1975). *Semiótica e filosofia - Como tornar clara nossas idéias*. São Paulo: Cultrix.
- ___ (1976). *The New Elements of Mathematics*, ed. Eisele, Carolyn. 4 vols. The Hague: Mouton. Referida como NEM.
- ___ (1983). *Peirce e Frege*. Os Pensadores. São Paulo: Abril Cultural.
- PESSIS**, Anne-Marie (1987). *Art rupestre préhistorique: premiers registres de la mise en scene*. Paris: Tese de doutorado apresentada na Universidade de Paris.
- PIRSIG**, Robert M. (1990). *Zen e arte de manutenção da motocicleta*. São Paulo: Paz e Terra.
- ROTMAN**, Brian (1988). Toward a semiotics of mathematics. *Semiotica* 72 (1/2): 1-35.
- ___ (1987). *Signifying nothing: The semiotics of zero*. London: Macmillan.
- SANTAELLA**, Lúcia (1990). Outr(a)idade do mundo. *Linguagens - Revista da Regional Sul da Associação Brasileira de Semiótica*, N° 3, Agosto: 58.
- ___ (1993). *A percepção - uma teoria semiótica*. São Paulo: Experimento.
- SOGABE**, Milton (1996). *Além do olhar*. Tese de doutorado em comunicação e semiótica. São Paulo: PUCS, sob orientação de Lúcia Santaella.
- STAHEL**, M. trad. (1996). *O livro da arte*. São Paulo: Martins Fontes.