Hermes Renato Hildebrand

As Imagens Matemáticas

a semiótica dos
espaços topológicos matemáticos
e suas representações no
contexto tecnológico

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Comunicação e Semiótica, sob a orientação da Profa. Doutora Maria Lúcia Santaella Braga.

Banca Examinadora

Agradecimentos

A Profa. Dra. Maria Lúcia Santaella pelo incentivado e pela confiança e
ao Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico – CNPq
pelo financiamento.

Pela paixão que foi realizar este trabalho,
dedico-o aos meus grandes amores:
meus pais, Hermes e Ziláh, Evani e meus filhos, Natália e Mateus.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é um estudo semiótico das imagens matemáticas produzidas no contexto tecnológico. Pretendemos elaborar uma análise semiótica dos espaços topológicos matemáticos e suas representações determinadas pelos meios de produção eletro-eletrônicos. Adotaremos como fundamento de análise o sistema filosófico de Charles Sanders Peirce.

Nosso estudo observa a linguagem matemática pelos seus signos, nos aspectos sintáticos das formas que são geradas, nos aspectos semânticos que são descritos, narrados e dissertados no código matemático, e nos aspectos paradigmáticos que constroem os vários pensamentos matemáticos. De fato, elaboramos um modelo que permitiu observar as imagens produzidas por esta ciência, aumentando os níveis de complexidade do raciocínio sobre as imagens geradas pela matemática, observadas no contexto tecnológico.

ABSTRACT

The objective of this research is a semiotic study of the mathematical images produced in the technological context. We intended to elaborate a semiotic analysis of the mathematical topological space and their representations determined by the eletro-electronic production way. We will adopt as well founded analysis philosophical system of Charles Sanders Peirce.

Our study observes the mathematical language for its signs, in the syntactic aspects in the way they are generate, in the semantic aspects they are described, related and discoursed within the mathematical code, and in the paradigmatic aspects, in wich the mathematical thought is built. In fact, we elaborated a model that allowed the observation of the images produced by this science, increasing the reasoning complex's levels over the images generated by mathematics, observed in the technological context.

ÍNDICE

Toda a axiomatização coerente na matemática
contém proposições indecifráveis.
(Kurt Gödel)

1. INTRODUÇÃO

Sem dúvida, o momento em que vivemos vem marcado por profundas modificações em relação à nossa percepção, cognição e elaboração de conhecimento. Os computadores, as redes informatizadas globalmente conectadas, a realidade virtual e as vidas artificialmente concebidas, ao serem associados aos signos gerados pelas novas tecnologias e seus procedimentos lógicos lineares e não-lineares, põem à prova nossos métodos de análise, ação e compreensão dos fenômenos.

Os meios eletro-eletrônicos de produção modificam nossas formas de planejamento que, em busca das similaridades e da interatividade entre os diversos modelos sistêmicos, intensificam as possibilidades de simulação em todos os campos do conhecimento, transformando nossa percepção e o meio ambiente em que vivemos. Intrinsecamente relacionada a esses meios, vamos encontrar a ciência matemática constituindo e sendo constituída pelos "hardwares" e "softwares" que, incontestavelmente, estão conectados às nossas vidas e aos nossos pensamentos.

Não é de hoje que a matemática é determinada e determina nosso modo de criar, agir e pensar. Ela é um sistema de signos, cuja gramática sempre fundamentou o discurso racionalista tecno-científico da cultura ocidental (1988: 1). Rotman, de acordo com isto, afirma que as normas, diretrizes e leis deste discurso sempre estiveram profundamente marcadas pelos princípios e estruturas matemáticas em um nível lingüístico e simbólico e, ainda, segundo Peirce, em um nível diagramático (1983: 42).

A linguagem dos números está presente em tudo que fazemos, principalmente quando tratamos das questões sobre a cognição e as atividades intelectuais humanas. E é nesse contexto que iremos analisar as representações matemáticas intrinsecamente ligadas aos espaços topológicos que as definem. Por outro lado, esses princípios e fundamentos a serem analisados estão apoiados na perspectiva semiótica do filósofo americano, Charles Sanders Peirce, para quem os objetos matemáticos, sobre os quais elaboramos esta análise, sempre são apresentados na forma de hipóteses e deles somente podemos extrair as conseqüências possíveis, não tocando nas questões de fatos.

A compreensão e o tratamento do signo matemático sempre foi um conhecimento de abordagem complexa, dado o seu caráter abstrato enquanto ciência. Em princípio, ela nada tem a ver com qualquer tipo de experiência sobre os objetos reais do mundo. Parece ser construída numa linguagem sem significados, que nada deve aos fatos comuns. A ciência dos números e dos espaços, como já foi conhecida, tem como principal objetivo descobrir as relações internas dos sistemas, sem identificar ao que eles se referem.

De fato, os cientistas sempre estiveram interessados nas formas de representar da matemática e, mais recentemente, nas formas lógicas da própria linguagem. As *imagens visuais* geradas pelos axiomas e sistemas matemáticos e as *imagens mentais* produzidas com a intenção de adequar o nosso raciocínio lógico ao conhecimento desenvolvido nesta ciência, nos conduzem a uma linguagem que ao ser exteriorizada, aparenta ter total identidade com o pensamento humano. Por isso, resolvemos elaborar esta tese de doutorado que é, fundamentalmente, um estudo sobre "*as imagens matemáticas*".

1.1. Nosso Objetivo

A busca de um objeto de estudo que fosse tão pequeno, que permitisse um recorte consistente para a elaboração de nossa Tese de Doutorado e que, ao mesmo tempo, fosse tão grande que permitisse estabelecer possíveis generalizações, levou-nos a este projeto que resolvemos denominar *as imagens matemáticas.* E de fato, depois de uma série de tentativas de delimitações do que pretendíamos estudar, chegamos a esta proposta de *uma análise semiótica dos espaços topológicos matemáticos e suas representações determinadas pelos meios de produção eletro-eletrônicos*.

Num primeiro instante esta opção nos pareceu insuficiente, na medida em que olhávamos as imagens geradas por um único suporte de produção, o eletro-eletrônico. No entanto, quando notamos que, a partir da observação de imagens geradas por modelos matemáticos no contexto tecnológico, que são aqueles produzidos pelos atuais meios de comunicação, poderíamos chegar às estruturas diagramáticas dos signos nesta ciência e, com isso, buscar possíveis generalizações de padrões e modelos lógicos desta linguagem, acreditamos estar no caminho certo.

De fato, confirmando nossa escolha, verificamos, ao realizá-la, que *as imagens matemáticas* carregam em si um grau de complexidade e abstração extremamente profundo, similar ao que podemos encontrar na linguagem matemática propriamente dita. E, neste caso, constatando a complexidade de nosso objeto de estudo e a oportunidade de estudá-lo. Nossa análise deve ser conduzida por três vertentes diferentes de organização: num nível imagético, num nível lingüístico e num nível relativo aos paradigmas de percepção. Todos os três devem ser analisados enquanto signos matemáticos, portanto, diante de um tipo de representação que observa as estruturas dialógicas e diagramáticas de nosso objeto de estudo. Para Charles Sanders Peirce, em um trecho de seu texto sobre a *"Consciência da Razão"*, publicado em *"The New Elements of Mathematics"*, nós vemos que:

> *“... as expressões abstratas e as imagens são relativas ao tratamento matemático. Não há nenhum outro objeto que elas representem. As imagens são criações da inteligência humana conforme algum propósito e, um propósito geral, só pode ser pensado como abstrato ou em cláusulas ge-*

rais. E assim, de algum modo, as imagens representam, ou traduzem, uma linguagem abstrata; enquanto por outro lado, as expressões são representações das formas. A maioria dos matemáticos considera que suas questões são relativas aos assuntos fora da experiência humana. Eles reconhecem os signos matemáticos como sendo relacionados com o mundo do imaginário, assim, naturalmente fora do universo experimental. (...) Toda a imagem é considerada como sendo a respeito de algo, não como uma definição de um objeto individual deste universo, mas apenas um objeto individual, deste modo, verdadeiramente, qualquer um é de uma classe ou de outra" (NEM 4: 213).

Este pensamento de Peirce dá ênfase aos aspectos diagramáticos das imagens e das expressões matemáticas, cujo enfoque está nas relações entre os diversos elementos que as estruturam e que, certamente, vamos encontrar nos diferentes modos de olhar para elas. A matemática traz em si uma perspectiva de percepção que sempre esteve presente nos modelos e nas formas de produzir conhecimento dos seres humanos, ela, historicamente, tem recorrido às imagens para se estruturar. O homem desde que começou a refletir sobre esta ciência sempre utilizou os signos visuais para representar seus pensamentos.

Foi deste modo que, ao desenvolver nosso projeto de pesquisa, verificamos que, para observar profundamente *as imagens matemáticas* deveríamos, antes, entender o comportamento dos signos matemáticos em si. Isto é, para analisarmos as imagens geradas pelos meios de produção eletro-eletrônicos, que estão totalmente marcadas pelas ciências matemáticas e as lógicas, deveríamos antes compreender o comportamento do universo da matemática.

Por outro lado, constatamos também que, ao elaborar análises sobre *as imagens matemáticas*, necessariamente, seríamos conduzidos a observar as imagens obtidas através de outros meios. De fato, para observar um fenômeno qualquer devemos também observar aquilo que se opõe a ele, isto é, as diferenças. Pois isto é fundamental para a compreensão e construção de qualquer raciocínio. Como exemplo deste fato, podemos citar a imagem de resolução do *"problema dos convidados de uma festa"*, que será analisado neste trabalho e que não foi gerado por procedimento eletro-eletrônico. Assim, resolvemos manter no corpo deste texto, algumas imagens que não possuem relação direta com as novas tecnologias, acreditando que o conhecimento se estabelece a partir de critérios de diferenciação e oposição entre modos de representações. Para Nöth,

> *“a universalidade da oposição na semiose [ação do signo] tem sido uma crença essencial das principais doutrinas da semiótica. A oposição, além disso, parece ser constitutiva não apenas da semiose, mas também da estrutura do micro e do macrocosmo pré-semiótico. Os principais autores da semiótica têm argumentado principalmente a partir de um ponto de vista sincrônico quando investigam a oposição como um pré-requisito da estrutura e do sistema na semiose”* (1996: 232).

Não entraremos em detalhe sobre estas questões relativas às oposições e às diferenças, porque não é foco deste trabalho, no entanto, constantemente estaremos encontrando estes aspectos em nosso estudo. Para compreender melhor este raciocínio sobre as diferenças, remeteremos nosso leitor ao livro de Winfried Nöth sobre *“A Semiótica no século XX“*. Nele, o autor dedica um capítulo inteiro ao estudo da *“semiose no cosmo e na biogênese”* como *“oposição nas raízes da evolução e da vida”* (1996). Nöth, em seu estudo sobre as semióticas de origem não-peirceanas, afirma que as estruturas elementares, as diferenças e as oposições, na bio e cosmogênese, estão definidas a partir de uma relação dual entre seus componentes. Por outro lado, de acordo com Peirce, a semiose é um processo de mediação, onde um primeiro é colocado em relação com um segundo por meio de um terceiro.

> *“A mera diferença definida por outridade não poderia ser apropriada para a semiose. Uma vez que ‘outro é meramente um sinônimo de ... segundo’ (Collected Papers 6.213), a diferença pode somente relacionar um primeiro a um segundo. ‘Um signo’, diferentemente, ‘é da ordem de um terceiro (Peirce, 1977: 31). Uma díade sem mediação de um terceiro é somente um ‘fato individual’ pré-semiótico, ‘já que... não há generalidade neste’ (CP 1.328)“* (Nöth 1996: 238).

Estes conceitos nos conduzem ao processo de semiose, como a *“ação do signo”,* elaborado por Peirce. No entanto, eles não são triviais e seus fundamentos estão totalmente associada à teoria semiótica desenvolvida por este filósofo americano. Assim, mais adiante, dedicaremos um capítulo inteiro a analisá-los com maior profundidade. A lógica da metodologia do pensamento peirceano é essencialmente triádica e, por ora, apenas, identificaremos que este modelo é vinculado a uma epistemologia fundada em três categorias universais do pensamento: *primeiridade*, *segundidade* e *terceiridade* e que tem, no *conceito de signo*, nossa mais importante conceituação. De fato, o signo deve ser definido como uma relação entre *o próprio signo* ou seu *fundamento*, o *objeto* e o *interpretante*. Voltaremos a este assunto em nosso capítulo sobre *“fundamentações teóricas”*.

1.2. O conteúdo de cada capítulo

Iniciaremos fazendo uma descrição resumida do que será tratado em cada capítulo de nosso trabalho, mostrando, de maneira esquemática, o corpo e a estrutura que pretendemos elaborar. Quando iniciamos este projeto não buscávamos encontrar mais do que uma primeira aproximação das fundamentações teóricas e metodológicas de nosso objeto de estudo: *as imagens matemáticas*, porém, em vários momentos, fomos surpreendidos com sucessivas e estimulantes descobertas sobre a teoria peirceana e sobre sua relação com os fenômenos ao nosso redor, naturais ou culturalmente concebidos.

A harmonia e a unicidade do pensamento deste grande filósofo, lógico e matemático, só se compara a uma obra de arte onde o todo e as partes se integram tão profundamente que fica difícil identificar onde termina um e onde começa o outro. Tentaremos construir, nesta pequena reflexão que é nossa tese, um raciocínio, no qual cada parte que compõe o todo, carrega consigo a unidade deste todo composto pelas partes e, de fato, produzir um texto que seja similar ao pensamento que temos como fundamentação.

No primeiro capítulo, observaremos alguns aspectos essências para demonstrar como chegamos a este tema. Mais detalhadamente, pretendemos ver outros pensamentos que nos conduziram a esta síntese. Entre eles, apresentaremos nossa dissertação de mestrado que, seguramente, foi o primeiro passo desta caminhada. Ao relacionar matemática com arte, em busca dos pontos de similaridade entre estas duas ciências e entre os signos gerados por elas, em *“Umatemar – Uma arte de raciocinar”* (Hildebrand 1994), encontramos elementos de sobra para formular esta proposta.

No segundo capítulo, dedicaremos nossa atenção aos pensamentos de Charles Sanders Peirce que, como já comentamos, é complexo, e produziu uma teoria do signo que nos permitiu realizar este trabalho. Os fundamentos e conceitos peirceanos nos conduziram a uma metodologia de investigação científica que, mais que princípios e conceitos norteadores, apresentou-nos um método de raciocinar que, sem dúvida, utilizamos para elaborar *as imagens matemáticas*. Peirce acreditava que a investigação é o caminho privilegiado para se conversar com a natureza em suas diferentes formas de manifestação, do que é microscópico ao que é macroscópico, em busca das verdades, nunca sobre uma teoria que estabelece verdades absolutas e eternas. Portanto, neste capítulo, pretendemos, de maneira esquemática, apresentar as definições e a classificação do signo peirceano e sua visão pansemiótica e universal do mundo, comparando-a a outras formas semelhantes de concepções epistemológicas.

Já, no terceiro, quarto, e quinto capítulos, nossa intenção é observar as imagens matemáticas pelos seus aspectos relativos à sintaxe, à semântica e aos paradigmas que geram, respectivamente. Todos os três fundados em um processo contínuo de elaboração de conhecimento a partir das estruturas dialógicas e diagramáticas dos signos matemáticos.

Analisaremos os aspectos relativos às formas e imagens obtidas pela matemática, dando ênfase àquelas que são produzidas pelos meios de comunicação eletro-eletrônicos. Nosso enfoque, neste capítulo, está nas relações estruturais que podem ser visualizadas nos padrões e na fisicalidade das imagens que são geradas quando produzimos o conhecimento matemático. Aqui, estaremos dando ênfase às representações visuais, gráficos, desenhos e esboços, que expõem em suas forma e estrutura às relações da linguagem e da visualidade destes signos. Estas representações estão intrinsecamente relacionadas aos espaços topológicos que as determinam.

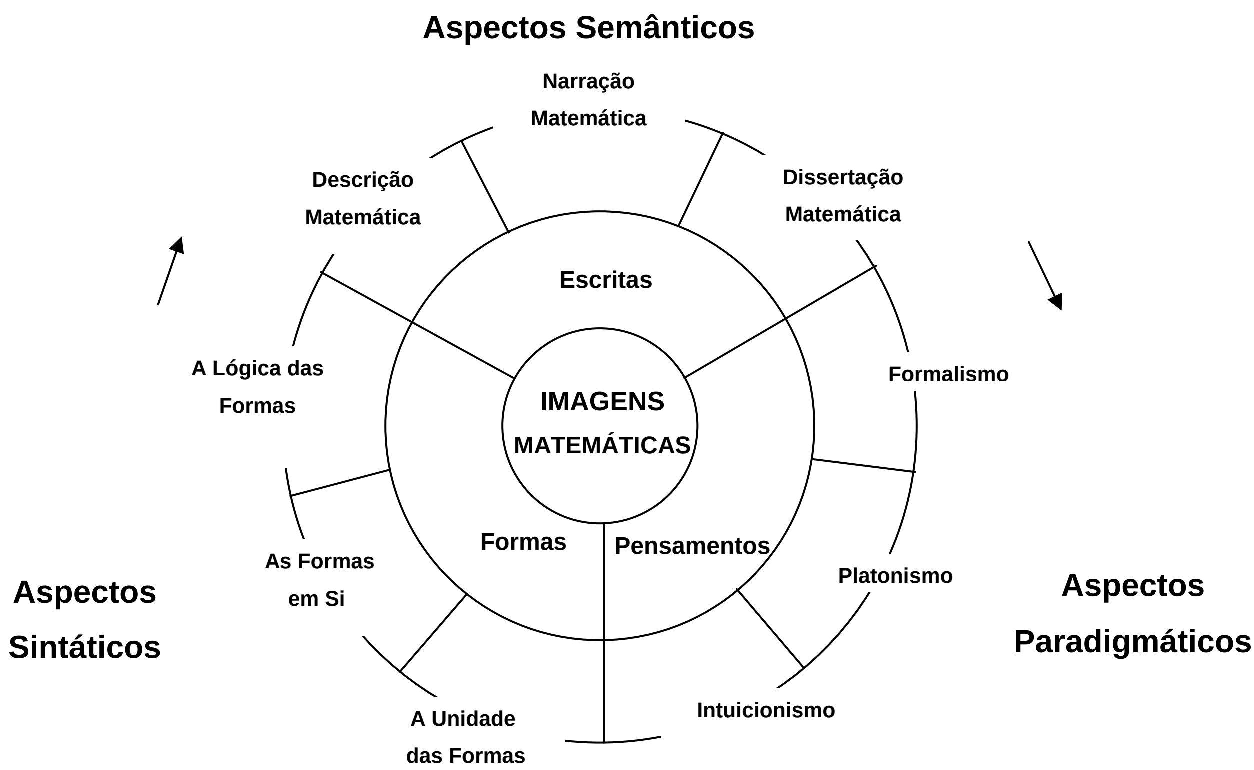
Em seguida, olharemos para os níveis lingüísticos do discurso semiótico e matemático, associando-os aos processos de elaboração da linguagem escrita. O pensamento matemático pode ser descritivo, quando cria e propõe axiomas e postulados; narrativo, quando está sendo elaborado testado e colocado à prova e dissertativo, quando formula sínteses de pensamentos que se transformam em lemas e teoremas e definem as estruturas lógicas dos modelos matemáticos.

E em terceiro lugar, completando este sistema semiótico de observação, estaremos discorrendo sobre os aspectos paradigmáticos dos signos matemáticos, cujos interesses estão nos níveis que comportam investimentos ideológicos e simbólicos. Estaremos olhando algumas formas de percepção que, historicamente, determinaram o pensamento sobre esta forma de representação. Observaremos os significados e as relações internas da natureza do objeto matemático e, também, pretendemos refletir sobre a linguagem matemática propriamente dita, isto é, pretendemos observar a filosofia matemática. Neste quinto capítulo não seremos exaustivos em nossas análises, pois, acreditamos que, ao observar três formas de concepção do signo matemático, estaremos considerando as mais significativas sobre esta linguagem. E são elas: o formalismo, o platonismo e o intuicionismo.

Finalizando nossa proposta, estaremos apresentando, após estes três últimos capítulos, uma visão semiótica, segundo o modelo peirceano, dos espaços topológicos matemáticos e suas representações diante das novas tecnologias de produção eletro-eletrônicas. E, assim, esse trabalho é de semiótica aplicada, isto é, uma abordagem lógica de observação dos signos matemáticos e de suas fundamentações e metodologia. De fato, esta é uma proposta que observa o signo pelos aspectos semióticos peirceanos que, por sua vez, é fundamentado em três princípios que podem ser encontrados em qualquer discurso semiótico: sintático, semântico e pragmático.

Sintetizando esses três aspectos, apresentaremos um esquema gráfico que irá nortear nossa percepção diagramática do modelo que propomos. Observaremos este esquema como uma síntese de pensamento que, como um momento discreto, é uma etapa de algo em construção. Não pretendemos esgotar as possibilidades desta visão, até porque ela, como uma semiose, evoluiu e, certamente, continuará evoluindo, indefinidamente, como é característica do pensamento. A amplitude desta reflexão será até colocarmos um ponto final neste trabalho, sabendo, porém, que como processo de semiose ela nunca se esgotará.

Diagrama dos Signos Matemáticos



A conclusão deste trabalho deverá ser um mero destaque de tudo que verificamos no transcurso dele, ou seja, uma síntese dos aspectos que encontramos em nosso percurso de análise. Buscamos incessantemente encontrar uma unidade para o nosso modelo de imagens matemáticas, para, finalmente, concluir por uma opção da metodologia peirceana. Pretendemos então, com está contribuição, atingir novos níveis de complexidade do raciocínio sobre as imagens geradas por modelos matemáticos e identificar novas formas de representação da linguagem matemática, determinada pelo uso dos meios eletro-eletrônicos de produção.

2. OS CAMINHOS QUE NOS LEVARAM A ESTE ESTUDO

A matemática sempre esteve presente na vida do homem. Em sua gênese e, segundo Peirce, ela é uma ciência que não pergunta nada sobre o real e pode excluir a possibilidade de relação com os fatos da experiência pura e simples, porque é desenvolvida, em princípio, no interior do pensamento humano. Ela nasce apoiada nos signos criados pela razão humana e é tida como uma ciência que tira conclusões lógicas de qualquer conjunto de axiomas e postulados, não se importando com as relações destes signos com o mundo.

Para Benjamin Peirce - pai de Charles Sanders Peirce - que viveu na primeira metade do século XVII, a matemática

> *"... é uma ciência que extrai conclusões necessárias; [já] o raciocínio matemático consiste em formar uma imagem das condições do problema, à qual estão associadas certas permissões gerais para modificar a imagem, e certas hipóteses que tornam impossíveis certas coisas. Pelas permis-*

sões achamo-nos autorizados a realizar alguns experimentos sobre a i-magem, e as impossibilidades por hipóteses fazem com que se chegue sempre aos mesmos resultados“ (CP 2.769).

Observando um pouco mais profundamente estas relações, notamos que esta ciência tem uma abordagem semiótica altamente complexa e, dada a sua íntima relação com a lógica, constatamos que as duas são de mesma natureza e, por conseguinte, determinam as formas de organização do conhecimento humano e como ele é, sem estar questionando de onde ele vem. Deste modo, podemos dizer que a matemática é uma ciência que, por princípio, nada tem a ver com qualquer fato real, a não ser com aqueles que extrai de dentro de si própria.

"é verdade que as idéias, elas mesmas, podem ser sugeridas por circunstâncias muito especiais; mas a matemática não se importa com isso. Ela é, assim, como a contemplação de um objeto belo, exceto que o poeta o contempla sem fazer perguntas, enquanto o matemático pergunta quais são as relações das partes de suas idéias umas com as outras" (Santaella 1993a: 158).

A principal atividade da matemática é descobrir as relações internas dos sistemas, sem identificar a que objetos ela se refere. Para isto, os estudiosos sempre estiveram preocupados com todos os tipos de representações que comportam a matemática, em particular, estiveram às voltas com as relações sígnicas no interior da própria linguagem, preocupando-se com os estímulos visuais e mentais que recebiam desta ciência, isto é, as *"imagens matemáticas"* e as *"imagens mentais"* criadas no interior desta ciência. Ainda, de acordo com Peirce, as imagens são representações dos modelos que concebemos mentalmente, isto é, são signos visuais que exteriorizam o comportamento de nossas idéias abstratas.

Segundo Ernest Nagel e James R. Newman, uma inferência matemática não está relacionada a qualquer significado especial associado aos axiomas e aos postulados. Para eles, ela foi reconhecida

"... como sendo muito mais abstrata e formal do que se supunha tradicionalmente: mais abstrata porque juízos matemáticos podem ser estabelecidos em princípio sobre o que quer que seja, mais do que sobre algum conjunto de objetos ou traços de objetos inerentemente circunscritos; e mais formalmente, porque a validade das demonstrações matemáticas se estriba na estrutura de juízos, mais do que na natureza de um assunto particular;... o problema com o qual o matemático puro se defronta (diferentemente do cientista que emprega a matemática ao investigar um assunto especial) não é se os postulados por eles assumidos ou as conclusões que deles deduzimos são verdadeiros, mas se as alegadas conclusões são de fato conseqüências lógicas necessárias das pressuposições iniciais" (1973: 20).

É óbvio que não pretendemos, com este trabalho, dar conta de todos os segmentos do conhecimento matemático, até porque, sabemos ser isto praticamente impossível, devido às proporções e amplitudes desta área de conhecimento. Segundo Philip J. Davis e Reuben Hersh, por estimativa, são demonstrados aproximadamente duzentos mil novos teoremas matemáticos por ano (1985: 47). Assim, é inconcebível pretender que alguém, hoje, possa dominar todos os ramos de conhecimento das ciências matemáticas.

Para então começar nossa reflexão, diante da diversidade de paradigmas culturais que podemos encontrar, vamos olhar diversos modos diferentes de encarar a ciência dos números e dos espaços, como era conhecida a matemática em nossa cultura. É obvio que nesta contextualização não faremos uma análise profunda de cada aspecto que abordaremos, pois não é este o enfoque que queremos dar a este trabalho. Nossa escolha pela matemática fundada nos valores da cultura ocidental é óbvia, porque é dela que emanam nossas crenças e percepções do mundo. Podemos evoluir em nosso raciocínio tentando compreender outras culturas, mas nunca deixaremos de ver este objeto de estudo com olhos diferente daquele configurado através de nossos paradigmas de percepção.

2.1. As imagens e a matemática

O enfoque que queremos dar a este trabalho é relativo à cultura ocidental, que determinou e determina os nossos valores e paradigmas. No entanto, uma abordagem que leva em consideração distintas formas de pensamento, se unidas ao processo de percepção planetária a que hoje somos submetidos, nos obriga a refletir, mesmo que de maneira sucinta, sobre a matemática de outras culturas e etnias. Tomemos então, como base de pensamento, a noção de *"etnomatemática"* de D´Ambrosio (1990), que afirma que o conhecimento matemático está presente nas mais diversas formas culturais e ao manejar números, quantidades, medidas, relações geométricas, imagens gráficas, padrões repetitivos de representações e tudo o mais relacionado à ciência matemática, estamos tratando de *"etnomatemática"* . De fato, esta ciência situa-se numa área de transição entre a matemática convencional e a antropologia cultural. Para ele, o que conhecemos,

> *"é na verdade uma etnomatemática que se originou e desenvolveu na Europa, tendo recebido algumas contribuições das civilizações indiana e islâmica e que chegou à forma atual nos séculos XVI e XVII, e então levada e imposta a todo o mundo a partir do período colonial. Hoje adquire um caráter de universalidade, sobretudo em virtude do predomínio da ciência e da tecnologia modernas, desenvolvidas a partir do século XVII na Europa"* (D´Ambrosio 2000: 112).

Desta forma, neste item abordaremos os aspectos matemáticos relativos às culturas e às etnias não ocidentais. Nosso propósito é apenas constatar a presença deste tipo de conhecimento nas mais diversas formas culturais, pois sabemos que de algum modo este conhecimento também interfere em nosso modo de pensar sobre os objetos do mundo matemático. Estaremos observando os aspectos matemáticos de forma pontual, indicando diferentes modos de observação, elaboração e estruturação lógica do conhecimento que aborda o mundo dos números e dos espaços, buscando simplesmente encontrar relações que nos ajudem a compreender as nossas *imagens matemáticas*.

O primeiro ponto que analisaremos é a lógica de construção topológica das representações gráficas realizadas pelo homem da pré-história. Em seguida, faremos alguns comentários sobre os desenhos realizados nos chapéus côncavos e convexos da cultura indígena norte americana e suas possíveis formas de representação ao tecer com as palhas, utilizando a matemática. Por fim, o terceiro ponto que destacaremos é o processo de construção lógica das peças artesanais do *"sipatsi"* - artesanato trançado da cultura de Gitonga, na Província de Inhambane, na cultura moçambicana. Isto será feito a partir dos textos de Paulo Gerdes e Gildo Bulafo, que observaram a lógica de concepção das tramas e urdiduras da tapeçaria moçambicana.

Analisaremos estes aspectos porque estes trabalhos mostraram-se fundamentados em concepções lógicas e nossa intenção é exatamente abordar os modos de organização matemática de outras culturas diferentes da nossa. O modelo de classificação que adotamos para fundamentar as análises é baseado no pensamento de Charles Sanders Peirce e em sua teoria da semiótica que, como veremos em detalhes no capítulo fundamentação teórica, pressupõem a universalidade do raciocínio lógico do ser humano, por isso, tem como conseqüência que ele serve para observar outras formas lógicas de percepção do mundo dos números, das geometrias e dos espaços em geral, isto é, o sistema peirceano também dá conta destas outras formas de representação em matemática.

O signo é algo que representa algo para alguém, sob um certo aspecto (Peirce 1983), e assim, percebemos o mundo através de nossas concepções lógicas que também estruturam nossas crenças e valores. Devemos admitir que a lógica que adotamos para cada modelo é aquela que mais facilmente se adapta a ele e, por ora, isto é suficiente para analisarmos os aspectos matemáticos das culturas diferentes da nossa. Fundamentado no modelo peirceano, abordaremos um aspecto *topológico das imagens* produzidas pelo homem pré-histórico, um *aspecto prático* das representações geradas no processo de elaboração dos chapéus côncavos e convexos e um *aspecto lógico* determinado nos padrões de representação na trama da carteira de palha da cultura africana.

2.1.1. Um aspecto topológico

O registro do pensamento, em algum tipo de imagem, sobre algum tipo de suporte, vem sendo realizado desde o homem pré-histórico. Junto com estas formas de representação vamos encontrar a necessidade de determinar parâmetros para realizá-las. São conhecidas as imagens dos touros gravadas nas pedras da caverna francesa de Lascaux com 5 metros de comprimento. Parece-nos fácil entender que, para realizá-las, foi necessário um conhecimento técnico e um procedimento lógico-matemático de modo a conceber representações tão grandes, obedecendo as suas devidas proporções. Para utilizar óxido mineral, ossos carbonizados, carvão vegetal e o sangue dos animais abatidos na caça com a intenção de representar imagens nas pedras, o homem necessitou planejar esta tarefa, assim como, também planejou a forma lógica de representar suas primeiras imagens.

A modelagem lógica das imagens dos touros exigiu conhecimento topológico de representação que, de algum modo, capturava os animais. Ou era de forma imagética para fixar suas representações em desenhos, ou era de forma xamânica, mística ou religiosa para dominar os animais, facilitando sua caça (Sogabe 1996: 59-64). No início, acreditávamos que as imagens eram produzidas para delinear as ações do dia a dia e, também, para representar as partes internas dos homens e dos animais como uma espécie de *"raio-x".* Por exemplo, podemos citar as *"mãos em negativo"* encontrada na gruta de Pech-Merie, na França, na qual o homem ao apoiar sua mão sobre a rocha e ao assoprar nela um pó colorido, determina o seu contorno e o vazio da imagem, marcando sua presença e deixando-a gravada na pedra como uma representação da pré-história, até os nossos dias. Obviamente não com esta intenção.

Desde os primeiros registros as imagens já possuíam, entre outras, a característica de serem científicas. Além de estabelecerem as formas de nossos modelos de representação, através de regras de proporcionalidade, também serviam para contabilizar as pessoas, os animais e as coisas do cotidiano. Assim, o homem se mostrava científico desde a pré-história. Primeiro rudimentarmente com seus registros nas pedras e depois, com representações mais detalhadas das imagens das plantas, da anatomia humana e animal, atribuindo a característica de ser um registro do olhar, isto é, a imagem é semelhante ao olhar (Sogabe 1996).

O autor citado acima, ao analisar as imagens e suas relações com o olhar, afirma que da pré-história até recentemente, tínhamos uma forma de representação que ele denominou de *"imagem do olhar"* (1996), isto é, uma imagem que na interseção entre ciência, arte e os meios tecnológicos de produção, é semelhante ao registro que elaboramos fundamentados nas regras de observação do olho humano, não contando com ferramentas auxiliares para isto. Inicialmente, as imagens e as estruturas geométricas que organizavam as nossas representações em desenhos e pinturas, eram executadas somente com técnicas artesanais e manuais.

> *"Os estudos preparatórios dos elementos utilizados em suas pinturas [Leonardo da Vinci], como os das pesquisas de plantas para 'Leda and the Swan' (Meyer, 1989), foram os resultados de uma observação apurada da natureza e de um registro preciso das plantas, nos mínimos detalhes. Esses registros, buscando uma fidelidade maior com o real, iniciam também a necessidade de um olhar mais minucioso sobre a natureza revelando, em conseqüência, novos conhecimentos"* (Sogabe 1996: 62).

Figura 2_1 - *Grande Cervo*, na Toca do Salitre, em São Raimundo Nonato, no Parque Nacional Serra da Capivara, no Piauí - Brasil - p. 57.

É trivial deduzir que as imagens encontradas desde a pré-história até recentemente, passando pelos egípcios, babilônios e gregos, possuem características topológicas e a capacidade de representar quantidades, mensurar proporções ou, até de, simplesmente, identificar padrões de repetição estilizados nas formas que apresentam. No Parque Nacional da Serra da Capivara, no Brasil, encontramos grafismos rupestres que nos possibilitam constatar que as imagens produzidas pelo homem pré-histórico, no sítio arqueológico de São Raimundo Nonato, no Piauí, contêm elementos que permitem inferir sobre relações de dimensionalidade, proporcionalidade e espacialidade das imagens. Os animais e seres humanos representados, mesmo aqueles mais estilizados, possuem proporções facilmente identificáveis nos traços, que mostram a intenção em quantificar e mensurar as figuras humanas e animais em suas representações.

A partir da pesquisa de Niède Guidon (1991), as representações rupestres existentes no Parque Nacional Serra da Capivara estão cronologicamente distribuídas em: Tradição Nordeste (12.000-6.000 anos BF - Before Present), Agreste (6.000-4.000 anos BP) e Geométrica (5.000-4.000 anos BP) e duas de gravuras: Itacoatiaras do Leste e Itacoatiaras do Oeste (Guidon 1991). Nas representações da Tradição Geométrica, caracterizadas por uma predominância de grafismos topológicos, que, para nós ocidentais, representam formas e figuras geométricas, como círculos, triângulos e retângulos, vamos encontrar uma tendência à *"geometrização"* e um grafismo abstrato e topológico.

Estas representações *"geométricas"* carregam, em si, uma grande variedade de possibilidades interpretativas, por isso, hoje são vista com muito cuidado em relação ao que significam. Estas características à *"geometrização"* também podem ser encontradas nas representações da Tradição Nordeste e Agreste neste sítio arqueológico. Porém, num estudo mais detalhado sobre elas, realizado por Martin (1997), vamos encontrar, associados a estes grafismos *"geométricos",* relações espaço - corporais, sistemas de contagem, relações com os corpos celestes e com os calendários lunares.

Anne-Marie Pessis (1987) comenta que neste sítio arqueológico do Parque Nacional Serra da Capivara, convém fazer uma distinção entre as formas gráficas de representação que mostram as profundidades espaciais e as que não mostram. A construção de cada uma delas é relativa ao objeto tridimensional e trata das projeções sobre o plano, tomando como base um objeto em relação ao outro e suas profundidades. É possível afirmar que a representação dos objetos se dá através da representação gráfica associada a certos fatores estruturais da visualidade e dos modos de representação bidimensional.

A representação em perspectiva aparece, na história do homem, somente com os Egípcios, Babilônios, Gregos e Etruscos, e os resultados gráficos são soluções que ressalta a tridimensionalidade das formas (Pessis 1987: 68). Em certas composições das representações rupestres da Tradição Nordeste, a relação sexual que é representada mostra parceiros que recebem o mesmo tratamento no espaço topológico gráfico. A composição é feita segundo um ponto de vista que expõem a identidade sexual dos dois atores e sua relação sexual. As rochas que são os suportes destas pinturas mostram que as figuras humanas são desenhadas como se estivessem na superfície do solo, na qual as duas pessoas interagem sexualmente.

Figura 2_2 - Cena com caráter sexual, na Toca do Caldeirão do Rodrigues I, em São Raimundo Nonato, no Parque Nacional Serra da Capivara, no Piauí - Brasil - p. 59.

"O estudo dos grafismos de ação da Tradição Nordeste permite constatar que, segundo as modalidades estilísticas, os autores recorrem às diversas soluções para estabelecer as relações de profundidade entre os elementos da composição pictural. Vemos várias formas de tratamento do espaço e da representação de profundidade entre os componentes do agenciamento pictural. Um destes procedimentos consiste na superposição de diferentes planos paralelos horizontais aos quais são dispostos componentes de uma representação, de tal sorte que parece achatado sobre o plano bidimensional, a percepção da profundidade exige do observador um ato imaginário de destacamento da figura. A partir desta operação de base, os procedimentos utilizam os recursos de obliqüidade que contribuem para produzir uma verdadeira percepção de profundidade, pois significa um crescendo e decrescendo, do momento que é visto, como um desvio ou aproximação gradual da posição estável da verticalidade e horizontalidade" (Pessis 1987: 69).

Nestas formas de representação gráfica podemos constatar claramente as estruturas lógico-matemáticas de caráter topológico que são necessárias para elaborar estes desenhos. Apesar delas serem realizadas sobre as pedras, que são suportes tridimensionais, podemos vê-las como representações bidimensionais que, facilmente, seriam realizadas em folhas de papel. Elas exigem uma concepção do espaço topológico que, certamente, tem dimensionalidade e proporcionalidade. Estas são características das estruturas lógicas e matemáticas destas imagens. Estes registros cravados nos diversos tipos de suportes usados na pré-história possuem estruturas topológicas e, portanto, lógicas e matemáticas, ao serem elaborados.

A seguir vamos mostrar uma das mais belas representações com imagens de homens, animais e muitas formas repetidas, mostrando as noções topológicas nas quais podemos identificar a espacialidade corporal e sistemas de contagem e quantificação. Esta imagem, realizada na Toca do Boqueirão do Sítio da Pedra Furada, em São Raimundo Nonato, no Parque Nacional Serra da Capivara, foi produzida por Marcelo da Costa Souza, que utiliza recursos computacionais para digitalizá-la. O processo de obtenção desta imagem e seu tratamento gráfico, através dos meios de produção eletro-eletrônicos, suscitam uma série de possibilidades interpretativas, pois, somente assim, podemos observar elementos que, apenas são possíveis com o uso dos computadores. Este processo permite uma ampliação da resolução gráfica da imagem que só é limitada pelo tamanho do arquivo a ser gravado no computador, isto é, extrapola a limitação da resolução gráfica do processo fotográfico. Com isso, podemos identificar imagens gravadas nas pedras que a olho nu não seriam possíveis de serem visualizadas.

2.1.2. Um aspecto relativo à práxis

Às vezes são imagens e representações bidimensionais, outras vezes são esculturas e peças tridimensionais; enfim, há uma grande variedade de suporte para representar as imagens criadas pelos homens. Observemos agora os chapéus côncavos e convexos dos índios norte-americanos do noroeste do Pacífico. Os côncavos foram realizados pelos índios Makan e outros povos Nootka, e os convexos pelos Tlingit, Haida e Kwakiutl. Nas imagens extraídas do livro *“o poder dos limites: harmonia e proporções na natureza, arte e arquitetura”* (Doczi 1990: 14), verificamos que os índios norte - americanos, ao elaborarem suas cestas, utensílios domésticos e vestimentas, fundamentam seus modelos topológicos de representação no ato da elaboração de seus objetos de uso diário. Suas imagens são produzidas na construção dos objetos de palha e nas imagens colocadas sobre eles.

Figura 2_4 - Chapéu côncavo feito de *"grama-de-urso"* e casca de cedro, pelos índios Makah e outros povos Nootka.

Figura 2_5 - Chapéu convexo trançado de raiz de abertos, popular entre os povos Tlingit, Haida e Kwakiutl.

“As aranhas tecedeiras constroem suas teias começando por fios retos que juntam no centro. Em seguida, tecem espirais ao redor desses fios, que vão-se alargando em órbitas cada vez mais amplas. Cesteiros traba-

lham em um padrão dinérgico semelhante. Inicialmente fibras duras, a urdidura, são amarradas em um ponto que será o centro do cesto. Em seguida, fibras flexíveis – a trama – são trançadas por cima e por baixo da urdidura, de forma rotativa. Em cestos feitos em caracol, uma fibra resistente, porém flexível, toma lugar da urdidura reta; ela é cosida, ao longo das linhas radiantes, com uma trama fina, com auxílio de uma agulha. Por causa da natureza dinérgica do processo de trabalho, é fácil reconstruir os contornos de um cesto" (Doczi 1990: 14-16).

Figura 2_6 – Análise proporcional de chapéus trançados do tipo convexo dos índios Tlingit, Haida e Kwakiutl.

Doczi afirma que nos chapéus côncavos podemos encontrar relações como as proporções áureas e nos chapéus convexos relações como o Teorema de Pitágoras. Estas estruturas lógicas podem ser identificadas nos esquemas diagramáticos dos chapéus elaborados ao lado que mostram as formas dos chapéus trançados, reconstruídas pelo método dinérgico de raios e círculos (Doczi 1990: 16).

Figura 2_7 – Manta tecida Chilkat.

Estas tramas e urdiduras nos remetem às similaridades e simetrias que sempre buscamos ao observar objetos. O próprio texto de Doczi aborda as proporções encontradas nas mantas cerimoniais dos Chilkat, em seus mínimos detalhes. Nestas mantas está representada uma sucessão de olhos e de formas ovóides, que também são encontradas nos chapéus, de modo esquemático e estilizado. É óbvio que estas formulações e relações lógicas matemáticas dos modelos com base em proporções e no Teorema de Pitágoras não foram utilizadas pelos índios norte-americanos, porém, alguns procedimentos lógicos, matemático e topológico, semelhantes aos utilizados nas imagens rupestres são necessários na construção destas peças artesanais.

Abandonando um pouco estas representações aparentemente livres do rigor da cultura ocidental para os procedimentos matemáticos, vamos retomar o pensamento de Ubiratan D´Ambrosio e constatar que em muitas civilizações do passado, como as dos astecas, dos maias, dos incas, das que habitaram as planícies da América do Norte, da Amazônia, da África subequatorial, dos vales dos Indus, do Ganges, do Yang-Tsé e da Bacia do Mediterrâneo, desenvolveram importantes formulações no campo da matemática. Introduzindo o próximo aspecto que queremos observar, as questões lógicas dos modelos matemáticos, vamos fazer alguns comentários sobre estas culturas que fazem parte de nosso paradigma de observação.

A civilização egípcia, que à cerca de 5.000 AP (antes do presente), deu origem a conhecimentos utilitários e especiais na matemática (D´Ambrosio 2000: 34), está baseada em representações que tratavam das medidas das terras e de aspectos relativos à astronomia. Os egípcios constataram que as inundações do Rio Nilo ocorriam depois que Sirus, a estrela do cão que aparecia a leste, logo após o nascer do Sol (Boyer 1974: 9). Após 365 dias, esta situação de alagamento das terras do Egito, voltava a acontecer e, assim, os egípcios elaboraram um calendário solar que avisava sobre as inundações. Eles utilizaram procedimentos matemáticos de registro do tempo e praticaram uma matemática utilitária, assim como os povos da margem superior do Mediterrâneo, os gregos, que também praticaram o mesmo tipo de matemática,

> *“mas ao mesmo tempo desenvolveram um pensamento abstrato, com objetivos religiosos e rituais. Começa assim um modelo de explicação que vai dar origem às ciências, à filosofia e à matemática abstrata. É muito importante notar que duas formas de matemática, uma que poderíamos chamar de utilitária e outra, matemática abstrata (ou teórica ou de explicações), conviviam e são perfeitamente distinguíveis no mundo grego"* (D´Ambrosio 2000: 35).

Nosso objetivo ao abordar aspectos matemáticos de momentos precedentes aos da cultura ocidental e de culturas diferentes da nossa, não é de reconstruir a história da matemática ocidental ou outra qualquer que seja, mas simplesmente, de apresentar alguns reflexões matemáticas destas culturas. Poderíamos, ainda, estar destacando aspectos matemáticos da Grécia e de Roma, no tempo de Platão e Aristóteles, ou analisar profundamente *"os elementos de Euclides",* ou ainda mais, tecer comentários sobre os trabalhos realizados por Pitágoras e seus seguidores, enfim, observar os vários momentos da história e da matemática da Antigüidade. No entanto, preferimos abordar alguns temas, aparentemente isolados, porém totalmente conectados pela forma de produção do pensamento e pela filosofia peirceana, nos conduzindo à *"etnomatemática"* (D´Ambrosio 1990, 2000). Devemos notar ainda, que faremos estas observações sempre com olhos ocidentais, o que não poderia ser diferente, já que somos frutos desta cultura.

2.1.3. Um aspecto lógico

Como último aspecto a ser observado antes de entrar nas formulações teóricas que sustentam este trabalho, observaremos alguns tópicos relativos às relações geométricas obtidas na construção das carteiras de mão trançadas, chamadas de *"sipatsi"*, da Província de Inhambane, em Moçambique. Paulus Gerdes e Gildo Bulafo mostram-nos as cestarias moçambicanas produzidas e os padrões geométricos de construção das tramas dos *"sipatsi".* O seu texto, *"Sipatsi: tecnologia, arte e geometria em Inhambane"* (1994) que tomaremos como base para estes comentários, expõem a forma de se construir carteiras de mão trançadas, aproveitando os princípios lógicos das tramas.

Figura 2_8

A coleta de dados com as cesteiras e os cesteiros, para a realização deste trabalho de análise das formas geométricas construídas nos *“sipatsi”*, de Moçambique, foi realizado nos distritos de Morrumbene, Maxixe e Jangamo, na Província de Inhambane. Segundo Gerdes e Bulafo, a execução das cestarias é um trabalho originariamente feminino. As mulheres também se dedicam ao cultivo das machambas, à pesca do camarão, à cozinha, ao transporte de água e à educação das crianças. Os homens se dedicam à pesca e à construção de casas. Porém, hoje, com a necessidade de aumentar a renda das famílias e o grande interesse despertado por este tipo de artesanato, tem aparecido vários cesteiros que se dedicam profissionalmente à execução das tramas e urdiduras das carteiras *“sipatsi”.* Os tecedores de *“sipatsi”* ,como são conhecidos os homens que elaboram este tipo de trabalho, também executam outros tipos de cestas.

A grande maioria dos padrões de fitas dos *“sipatsi”* é produzida baseando-se nas relações simétrica possíveis nas tecelagens. As carteiras e as cestas são construídas a partir de uma torção de 45^{o} ou 135^{o}, com simetria axial, isto é, o eixo utilizado para elaboração das figuras obedece a perpendicularidade das faixas. Esta é uma das formas de elaborar as peças de palha fina e maleável de um tipo de palmeira. Segundo Gerdes e Bulafo são vários os padrões de tecelagem elaborados pelos moçambicanos, porém, as tramas respeitam um padrão de simetria definida no plano bidimensional e suas possibilidades de execução limitada pela necessidade de trançar.

Figura 2_9 - Desenho realizado para confecção dos *“sipatsi”* com padrão geométrico simétrico verticalmente.

Para Gerdes e Bulafo, o eixo indicado na figura acima é perpendicular à direção da fita.

> *“Geralmente diz-se que um padrão-de-fita com eixo de simetria, perpendicular à direção da fita, apresenta uma simetria vertical. O padrão é invariante sob uma reflexão no eixo vertical. A palavra vertical é adequada se o livro em que se encontra a figura estiver numa posição vertical, por e-*

xemplo, colocado num estante: quando estiver assim, é de fato vertical” (Gerdes & Bulafo 1994: 79)

Como podemos ver, existem vários eixos verticais encontrados nas formas tramadas. Poderíamos dizer ainda, que os eixos de simetria são infinitos, já que as representações são fitas e poderiam se prolongar indefinidamente se assim o desejássemos. Este é apenas um dos exemplos das simetrias encontradas nas *“sipatsi”,* pois como as formas geométricas são construídas nas tramas e urdiduras das palhas tecidas, facilmente notamos que os desenhos e formas sempre obedecem às direções 0^o, 45^o, 90^o, 135^o e 180^o, obrigatórias na execução das tranças do *“sipatsi”.*

Gerdes e Bulafo elaboraram a classificação lógica das formas geométricas apresentadas nas carteiras, na qual é possível distinguir sete classes distintas de padrões. Segundo estes dois autores, as fitas podem ser:

“1) Padrões-de-fita que apresentam ao mesmo tempo uma simetria vertical, uma horizontal e uma rotacional de 180^o;
2) Padrões-de-fita que apresentam ao mesmo tempo uma simetria vertical, uma simetria translacional-refletida e uma rotacional de 180^o;
3) Padrões-de-fita que apresentam ao mesmo tempo uma simetria vertical;
4) Padrões-de-fita que apresentam ao mesmo tempo uma simetria horizontal;
5) Padrões-de-fita que apresentam uma simetria rotacional de 180^o;
6) Padrões-de-fita que são apenas invariantes sob uma reflexão translada (ou sob uma translação refletida);
7) Padrões-de-fita que são apenas invariantes sob uma translação e que não apresentam nenhuma outra simetria“ (Gerdes & Bulafo 1994: 79-80).

A noção de simetria nas figuras geradas por este sistema semiótico de representação geométrica das carteiras de Moçambique, é um modelo determinado fundamentalmente pela lógica da trama das fitas de palha. E, de fato, os axiomas lógicos que definem os modos possíveis de construção das formas geométricas das carteiras, são elaborados diante do ato de se tramar as próprias produções realizadas em tecelagem.

Figura 2_10 - Desenho identificado no *"sipatsi"* com padrões construídos pela trama da palha utilizada para executá-los.

Verificamos que a série de figuras gerada através dos paralelogramos dentados é equivalente a oito por treze, ou seja, oito tiras oblíquas, sendo cada uma delas composta por treze quadrados. Isto forma um período fixo no qual os desenhos produzidos se repetem e, assim, as formas são confeccionadas nas possibilidades desta estrutura. Na figura abaixo podemos verificar a trama que obriga os cesteiros a executarem seus trabalhos.

Figura 2_11 - Desenho realizado no *"sipatsi"* com padrões construídos a partir da trama da palha.

No final do livro de Gerdes e Bulafo elaboraram as possibilidades de padrões das fitas para dimensões 2X3, 2X4, 4X3, 5X3 e 3X4 mostrando que os padrões que formam são em número limitado em função da relação que adotamos para os quadrados horizontais e verticais. Já em outro livro, *"Explorations in ethnomathematics and ethnoscience in Mozambique"* (1994), organizado por Paulus Gerdes, vamos encontrar vários autores refletindo sobre as questões matemáticas e educacionais relativas às ciências nas produções africanas do século 21. Todos os textos abordam a ciência *"etnomatemática"* e aspectos matemáticos da linguagem e da aritmética mental dos africanos, em especial, sobre a cultura realizada em Moçambique.

Figura 2_12 – Padrões realizados nos *"sipatsi"* através da trama das palhas.

2.2. As imagens e a matemática na cultura ocidental

No tópico anterior, verificamos que as imagens sempre estiveram presentes e associadas às formas de elaboração do conhecimento humano. Constantemente somos obrigados a recorrer a elas para melhor observar o comportamento dos modelos que construímos. Em nossa cultura, planejar é sinônimo de elaborar modelos, diagramas, desenhos, esboços, enfim, imagens mentais e visuais que possibilitem antever situações.

Figura 2_11 – Giotto – Detalhe do Lamento ante Cristo Morto.

A partir da Idade Média, começando pelas pinturas de Giotto e pela revolução científica realizada por Galileu, a cultura ocidental pode planejar tudo ao seu redor. A representação de figuras através das diferentes formas perspectivas fez com que nossa cultura tivesse a capacidade de representar, numa superfície plana, elementos geométricos simulando três dimensões. Em particular, gostaríamos de destacar os trabalhos elaborados a partir do Renascimento, mais especificamente, as produções artísticas realizadas depois do artista plástico Ambrogiotto Bondone, conhecido apenas por Giotto, que nasceu por volta do século XIII. Suas pinturas consagravam um modelo teórico e lógico matemático realizado por volta do século III AC, conhecido como os *"Elementos de Euclides"* e que, hoje, é reconhecido como tendo sido o primeiro trabalho de axiomatização dos signos matemáticos. A geometria euclidiana pode ser visualizada nas pinturas realizadas a partir de Giotto.

A partir do século XIII podemos simular e planejar os ambientes que imaginamos através de imagens produzidas pelo modelo euclidiano. Segundo Edgerton (1991: 12), três são os aspectos que modificam nosso paradigma de percepção nesta época: um político, um religioso e um matemático. Para ele, os fatores que contribuíram para as grandes mudanças a partir do período renascentista foram: a política de rivalidade nos estados-cidades sustentada por uma economia capitalista burguesa mercantilista; o conceito ético religioso das *"leis naturais"* concebido a partir de um grande modelo fixado *"a priori",* que admitia a existência de um *"Deus"* único e, finalmente, uma filosofia para a pintura, que adotava princípios baseados em uma estrutura fundamentada no modelo axiomático e matemático da geometria euclidiana (1991).

Como verificamos, há muito tempo, estamos a utilizar as imagens para representar, compreender e simular o que está ao nosso redor, e hoje fazemos isto com muita competência através dos meios eletro-eletrônicos de produção. Nossos pensamentos estiveram associados à razão do modelo cartesiano, desde Giotto, em seguida, diante da serialidade de nossas produções, encontramos a fragmentação do consciente e inconsciente de Freud para, finalmente, chegarmos à virtualidade do que somos hoje. Em nossa dissertação de mestrado analisamos profundamente estes aspectos relativos às produções artísticas e matemáticas. Esta reflexão sobre as similaridades existente entre estas duas linguagens foi realizada no Departamento de Multimeios do Instituto de Artes da UNICAMP, sob a orientação do Prof. Dr. Paulo Tadeu Laurentiz e da Profª. Dra. Maria Lúcia Santaella Braga e teve como título *"Umatemar - uma arte de raciocinar"*. Nela observamos a evolução dos signos nas artes plásticas e na matemática. Nosso texto está fundamentado na cultura ocidental. Com certeza, esta dissertação que realizamos, foi o primeiro passo no desenvolvimento de nossas *imagens matemáticas.* Então, resumidamente, vamos retomá-lo.

Umatemar - Uma arte de raciocinar

Em nossa Dissertação de Mestrado tomamos como referência as produções realizadas nestas duas formas de comunicação de nossa cultura: as artes plásticas e a matemática. Observamos as estruturas e signos desenvolvidos por estas duas áreas do conhecimento humano. As artes plásticas fundamentam-se nos padrões de representação das imagens e estão carregadas de visualidade em sua lógica de construção, operando seus signos sob esta ótica de percepção. Já, a matemática, é elaborada a partir dos padrões lógicos de formulação do conhecimento e define espaços topológicos que operam sobre o processo de abstração mental humano e é construída a partir de diagramas e com base na linguagem escrita (Rotman 1988: 6).

Escolhemos o ciclo materialista industrial ocidental, obviamente, porque é dele que emanam nossos valores, fundamentados na matéria e na forma de produzir da cultura ocidental, assim, o modelo que adotamos para analisar estes dois tipos de signos estava apoiado nos meios de produção pré-industrial, industrial mecânico e industrial eletro-eletrônicos. Não seguimos rigorosamente esta segmentação histórica, uma vez que entendemos que as mudanças de padrões e paradigmas não ocorrem instantaneamente, nem deixam de existir na passagem de um ciclo a outro, verificamos que tudo deve ser estruturado de maneira orgânica, não como um mundo com valores que tenham tido momentos de ascensão, apogeu e decadência.

De fato, ainda hoje, nossa cultura está impregnada pelo paradigma cientificista sustentado no modelo cartesiano, que tem como principais fundamentações teóricas os pensamentos de Descartes, Newton e Bacon. Para eles, qualquer sistema, por mais complexo que fosse, poderia ser compreendido a partir das propriedades das partes e, automaticamente, a dinâmica do todo se explicitaria. Acreditamos hoje numa evolução e que nossos sistemas são como *"holarquias"* (Laurentiz 1991), onde

> *"... parte e todo deixam de ter sentidos isolados e passam a compor um sistema único, íntegro e coeso ... . O modo de pensar oriental, com sua maneira intuitiva de estabelecer valores, aponta na mesma direção quando afirma que "o caminho e caminhante são fundamentalmente uma coisa única formando um todo, onde o primeiro não existe isolado do segundo, e muito menos esse longe do primeiro"* (Hildebrand 1994: 14).

Cada ciclo aqui observado faz parte da evolução de um modelo que, antes de ser determinado, é um processo de investigação científica, onde acreditamos no caminho percorrido em busca das verdades mais do que em sua definição absoluta. Quando da elaboração deste primeiro trabalho, tínhamos em mente um princípio fragmentário claramente cartesiano, sabíamos ser difícil abandoná-lo por completo, uma vez que nossas crenças eram frutos deste modelo. Hoje, não totalmente desvinculados das formulações de Descartes, acreditamos em um modelo com valores mais harmônicos, sem arestas, assim como é a obra filosófica de Charles Sanders Peirce.

2.2.1. O ciclo pré-industrial

Nossas reflexões começam no momento em que tínhamos uma percepção relacionada aos valores místicos da cultura medieval e à crença que tudo era orientado por leis naturais estabelecidas por algo superior a nós; acreditávamos em um Deus onipotente e onipresente. De outro lado, tínhamos a crença que, o sistema geométrico conhecido, com bases na teoria do matemático Euclides, fosse um sistema lógico divino organizado por leis da natureza e do pensamento humano. Nossos sensores eram apenas nossos órgãos sensitivos. Os nossos olhos, mãos e mentes estavam a produzir conhecimentos calcados nas particularidades dos indivíduos. A vida do campo nos fazia conviver com as forças da natureza e para suportá-las éramos obrigados a respeitá-las, admitindo-lhes um caráter místico.

Nas artes plásticas a perspectiva linear com apenas um ponto de fuga resumia uma situação, na qual a obra de arte é uma parte do universo, como ele era observado, ou, pelo menos, como deveria ser observado, na percepção de um indivíduo, isto é, a partir de um ponto de vista subjetivo, num momento particular. Dürer, parafraseando Piero Della Francesca, afirmava que *"primeiro é o olho que vê; segundo, o objeto visto; terceiro, a distância entre um e outro*" (Panofsky 1979: 360). Aqui encontramos o primeiro ponto de similaridade entre a arte e a matemática produzida nesta época. Assim como nas artes plásticas, a característica da individualidade pode ser observada na matemática.

E, no final deste período, haviam sido construídas três formas de se pensar a ciência do espaço e dos números, todas elas baseadas em uma visão geométrica intuitiva fundada na observação, isto é, numa percepção matemática euclidiana espacial. A produção artesanal imprimia as marcas individuais do produtor no objeto criado, fundamentalmente no ciclo pré-industrial. Percebemos também que todas as teorias matemáticas olhavam para o seu objeto de estudo pelo aspecto geométrico e euclidiano com bases na observação pura e simples de nossos sensores naturais. Isto é, o espaço topológico utilizado pelos pensadores sustenta-se numa métrica plana dada, sem quaisquer instrumentos auxiliares. De modo que, nesse período, a visão sistêmica dos espaços topológicos matemáticos e artísticos era dada pela percepção intuitiva humana sem ferramentas de avaliação; o que valia era o olho e a nossa percepção individual.

A arte era medida e ordem nos momentos em que estabelecia as relações de proporcionalidade entre o mundo, a arquitetura e as representações das figuras humanas. As ordens: dórica, jônica e coríntia, muito utilizadas nas construções arquitetônicas, são exemplos deste tipo de princípio utilizado em nossas representações pictóricas no período pré-industrial. Nós estávamos diante de uma forma de representação centrada no sistema perspectivo linear e o senso comum era a simetria, o equilíbrio, a ordenação e a mensuração.

A matemática, na tentativa de estabelecer uma projetividade espacial, operava sobre conceitos semelhantes aos dos artistas, isto é, apesar de tentar representar as formas geométricas de maneira espacial, não ia além de uma convenção planimétrica do espaço, concebendo assim, um sistema de ordem e medida calcado na deformação dos objetos e em sua projeção sobre um plano. Para Giles Gaston Granger, o matemático Desargues tinha um método de projeção e de construção perspectiva que era uma *transformação* e que permitia passar do espaço ao plano. Porém, de fato, era apenas uma deformação particular dos comprimentos. Por outro lado, ainda segundo Granger,

> *"o matemático Descartes dizia que "os problemas de geometria facilmente podem ser reduzidos a termos tais que, depois disso, só haveria necessidade de conhecer o comprimento de algumas linhas retas para poder construí-los"* (Granger 1974: 64).

É evidente que quando Desargues e Descartes referiam-se a comprimento, importam-se apenas com as distâncias que se desdobravam em duas direções, comprimento e largura; remetendo-nos definitivamente ao plano. Se verificarmos as obras destes dois autores, como também dos outros matemáticos contemporâneos a eles, nós notaremos que a percepção espacial matemática da época era fundamentalmente bidimensional.

Eles definiam conceitos e operavam com modelos que tinham suas bases em signos geométricos extraídos da antiguidade clássica. A geometria e suas projeções, tanto na arte quanto na matemática, eram de concepção euclidiana; a única forma conhecida de representar o mundo através das imagens visuais nas pinturas e de interpretar os espaços matemáticos.

Figura do Picasso - Dunchamp

2.2.2. O ciclo industrial mecânico

Obviamente essa percepção foi sofrendo sucessivas modificações, estes valores lentamente transformavam–se. Nossos paradigmas passavam a estar fundamentados nas qualidades físicas e químicas da matéria e nos levavam a pesquisar a lógica das relações da natureza. O homem deixava de ser passivo e iniciava um processo imposição de relações lógicas ao universo que o cercava. O sistema artesanal de produção gradativamente dava lugar à produção em série, imprimindo cada vez mais velocidade ao nosso sistema produtivo e conseqüentemente à nossa percepção.

Nossos sensores, antes baseados na díade olho-mão, passam a estar apoiados agora na díade homem-máquina. Dividíamos com as máquinas a autoria dos produtos criados. A partir desse ciclo, fomos obrigados a especializar-nos em áreas de conhecimento, já que, somente assim, acreditávamos poder conhecer o universo que nos cercava. Neste momento, segmentávamos tudo, o conhecimento se fazia pela compreensão das partes e a união delas nos levaria a compreensão do todo de nosso sistema produtivo. Fragmentávamos e imprimíamos velocidade ao conhecimento, a produção e a percepção.

Por outro lado, a racionalidade levada ao extremo produzia um pensamento calcado no inconsciente humano. Num primeiro instante, isso parecia ser contraditório, porém, passávamos a não ficar nada surpresos, ao admitir que os sonhos diziam muito mais ao nosso respeito do que poderíamos perceber conscientemente. O homem via que a máquina lentamente passava a ser um importante meio de produção e assim, conforme Walter Benjamin, consolidava-se a industrialização mecânica como período da *"reprodutibilidade técnica"* (Benjamin 1987: 170). Ao implantar-se o novo processo de produção de bens, onde o trabalho das máquinas acrescenta velocidade ao sistema produtivo, redirecionamos nossas percepções e ações no mundo. Os produtos eram executados um a um, para um determinado patrono e ganhavam novas características, assim; a civilização industrial introduzia a serialidade em seu sistema produtivo.

Nas artes podemos verificar que Pieter Bruegel estava preocupado com a vida dos povos humildes e os costumes populares. Já Caravaggio colocava São Mateus como cobrador de impostos dentro de uma taberna, tratando os temas sagrados cotidianamente. David retratava Marat, chefe político da revolução francesa, assassinado dentro de uma banheira por sua secretária. Goya expunha a família de Carlos IV a uma situação de deboche, pintava todos os membros da família real como se fossem um bando de fantasmas e ainda, destacava o rei, dando-lhe a cara de ave de rapina. Ingres, com o mesmo realismo de David, pintava o burguês Louis Bertin em uma tela com grande profundidade psicológica. E assim, vemos que todos os artistas plásticos estavam a mudar e inovar em suas produções.

De outro lado, procurando compreender a luz enquanto fenômeno em si, a fotografia passava a capturar o momento real vivido, enquanto a pintura tentava compreender, conceitualmente, como se comportava a luz diante dos olhos. Nasciam os movimentos artísticos: impressionista, pós-impressionista, expressionista e pontilhista. Eles poderiam ser sintetizados nas obras de Manet, Monet, Degas, Renoir, Van Gogh, Gauguin, Toulouse Lautrec e George Seurat, que, entre outras formas de significar, estavam tentando representar o que poderia ser a captura do efêmero, do imaginário, da tensão, do movimento, da luz e do instantâneo em suas pinturas.

Nem bem chegávamos ao ápice da industrialização mecânica, caminhávamos em direção ao seu esgotamento através dos movimentos cubista, concretista, futurista e suprematista. Todos tendo como tema central o abstracionismo, isto é, os artistas queriam ver suas obras de arte representando a si mesmas, sendo o puro real e não mais a representação de algo. A obra em si passava a ser o próprio objeto real e concreto, nada representava a não ser ela mesma.

Voltando nossa atenção para a matemática, verificamos que ela estava preocupada com a teoria das probabilidades, refletindo as certezas e incertezas deste universo, que, a partir deste momento, passa a ser percebida em constante movimento e diante de uma infinidade de contradições. A teoria das incertezas observava os eventos pelas repetidas vezes que eles ocorriam, traduzindo em quantidades numéricas as possibilidades de ocorrência de um fenômeno. Ao analisarmos estas questões na probabilidade e no cálculo diferencial e integral éramos conduzidos ao seio da percepção sistêmica na matemática, uma das principais questões da modernidade. Esse conceito, se levado às últimas conseqüências, mostrava-nos a dialética tomando corpo, também, na matemática.

A análise diferencial e integral, desenvolvida nesta época, fundamentava o pensamento de quase todos os matemáticos, inclusive do físico Newton. A matemática chega a uma consistência sistêmica tão profunda, que o Euler, com apenas uma fórmula, conseguiu compatibilizar quase toda a matemática conhecida até aquele momento. Esta expressão algébrica reuniu em seu interior princípios do cálculo diferencial e integral, da teoria das probabilidades, da teoria das séries, da teoria das funções, da álgebra e também da filosofia matemática (Davis 1985: 232).

$$\boxed{e^{\pi i} = \cos\pi + i.\mathrm{sen}\,\pi = -1 \quad \text{ou} \quad e^{\pi i} + 1 = 0}$$

Todos os ramos do conhecimento matemático, de algum modo, eram expressos nessa fórmula. Além disto, ela possuía uma áurea misteriosa muito grande, pois conseguia abrigar em seu interior a relação entre as cinco constantes mais importantes de toda a análise matemática: *e, π , i, 0 e 1* (Granger 1974: 88). Neste momento, para melhor compreender o princípio sistêmico que toma conta do raciocínio matemático e a busca de uma unidade estrutural em toda esta ciência, observemos a história da geometria euclidiana e de seus cinco axiomas. Ela conta-nos que, desde Euclides e de sua axiomatização da geometria em *"Os Elementos"* os matemáticos procuravam esta mesma estrutura para as outras formas de produção de conhecimento no mundo dos números.

Vejamos então como isto ocorreu. Desde os gregos, os estudos realizados sobre os cinco axiomas de Euclides, sempre confirmaram a consistência deste sistema. Isto perdurou até o final do século XIX. O quinto axioma de Euclides, o mais conhecido deles, definia o conceito de retas paralelas. Podendo ser enunciado sem nenhum rigor matemático, do seguinte modo: duas retas são paralelas quando se encontram no infinito.

Os axiomas de 1 a 4 são triviais, intuitivos e tratam de conceitos geométricos de fácil percepção. Não formulam questões mais profundas sobre a geometria euclidiana. Porém, o quinto axioma, o das retas paralelas, sempre despertou o interesse de todos os matemáticos, principalmente no século XIX, que, na tentativa de deduzi-lo logicamente a partir dos anteriores, fazem nascer a geometria não-euclidiana. Isto é, a busca de provar a consistência sistêmica desta geometria levaria o homem a descobrir novos caminhos fundamentados na estrutura axiomática deste momento em diante, fundamental no desenvolvimento do conhecimento na matemática.

Conhecida como geometria imaginária, e atribuída ao matemático russo Nicolai Lobachevsky, as geometrias não-euclidianas surgem a partir da tentativa de demonstração do último axioma de Euclides. Na impossibilidade de realizar essa dedução lógica encontram-se outros espaços topológicos matemáticos, conhecidos hoje como: geometrias hiperbólica e elíptica. Elas são, respectivamente, atribuídas a Lobachevsky e a Janos Bolyai e G. F. B. Riemann.

Próximo ao começo do século XX, com procedimento semelhante ao que gerou as geometrias não-euclidianas, vamos encontrar outra contradição que, junto com o paradoxo das paralelas, irá reformular os princípios matemáticos conhecidos até este instante. Georg Cantor, trabalhando na teoria dos conjuntos, em particular sobre a *"cardinalidade"* dos conjuntos finitos e infinitos, nos conduz à noção de infinidades em matemática e ao conceito de conjuntos não-cantorianos. Esta questão, que veremos com maior detalhe no corpo deste trabalho, deve ser observada intimamente relacionada à noção de quantidade de elementos em conjuntos e, mais precisamente, deve ser associada ao conceito de vizinhança em matemática.

Os elementos de uma série matemática infinita podem ser classificados e ordenados, isto é, podem ser colocados uns ao lado dos outros, criando uma seqüência infinita de números, determinando assim, a cardinalidade desta série. Ao construir este modelo estamos enumerando os conjuntos de números infinitos. Com a introdução destes princípios, na geometria e na teoria dos números, constatamos que os matemáticos, assim como os artistas, substituem a concepção intuitiva do espaço euclidiano, aceita há séculos, por uma concepção onde a intuição é primitivista, topológica de caráter sensível. Para o matemático Henry Poincaré, os axiomas da geometria são convenções, isto é,

> *"... são escolhas feitas entre todas as convenções possíveis que devem ser orientadas pelos dados experimentais, mas que permanecem livres, sendo limitadas apenas pela necessidade de evitar qualquer contradição"* (Pirsig 1990: 251).

A partir da negação do quinto axioma de Euclides e da introdução do conceito de conjuntos não-cantorianos, podemos desvincular nossa percepção espacial matemática das geometrias e, assim, auxiliados pela teoria axiomática, somos levados a operar matemática e geometricamente num patamar onde as generalizações são nossa principal ferramenta. A matemática deixa de ser construída por modelos que possuem características fortemente intuitivas e passa a ser fundamentada nas teorias axiomáticas e no conceito vetorial que nos permitem construir modelos absolutamente abstratos e totalmente desvinculados do mundo real. Eles são baseados em signos, operações e estruturas, na maioria das vezes, impossíveis de serem associados às coisas da percepção intuitiva.

Por outro lado, olhando as artes plásticas, verificamos que duas formas de expressões sobressaiam. A primeira estabelecia relações com o mundo do inconsciente, e tinha, no seu principiar, expoentes como, Henri Matisse, Gustav Klimt e Oskar Kokoschka e suas pinturas retratando o *"fin-de-siècle",* suas angústias e distorções. Esta forma de conduta podia ser reconhecida no movimento artístico dadaísta que, através da deformação deliberada dos objetos representados, determinavam uma forma de protesto contra a civilização industrial. O movimento surrealista acreditava que suas produções eram relativas às percepções do psiquismo e que poderiam exprimir o verdadeiro processo do pensamento. Para eles, isto ocorria, independente do exercício da razão e de qualquer finalidade estética ou moral atribuída aos trabalhos (Hauser 1972: 662).

A segunda forma expressiva, denominada de arte abstrata, era expressa pelas correntes cubista, construtivista, futurista, suprematista, neoplasticista e concretista. O seu expoente inicial foi o artista Cézanne que acreditava que a arte era representação de si mesma, em seguida, na Europa, vieram Kandinsky, Picasso e Braque. Já, na Rússia, vamos encontrar a arte abstrata nos trabalhos de Malevich, Gontcharova, Rodchenko e outros. Um dos maiores expoentes desta forma de expressão artística, e que, editava a revista *De Stijl* especializada neste tipo de arte, é o artista plástico Piet Mondrian. Para todos eles a arte abstrata era o puro real em si e não mais representação dos objetos do mundo. Ela era o próprio objeto concreto, não representa nada a não ser a si mesma.

Essas duas vertentes de representação, uma marcada pelas características psíquicas e mentais e a outra pelas formas abstratas de representação pictórica, determinavam profundamente a produção nas artes plásticas no período industrial mecânico. A continuidade dessas idéias iria determinar significativamente toda a produção artística do período eletro-eletrônico. Este movimento artístico, do qual falamos, foi fundamentalmente desenvolvido na Inglaterra e nos Estados Unidos através da pop-art. Ele vai ser o primeiro de uma série de outros movimentos, marcado por uma continuidade dos princípios psíquicos e abstracionistas, do fim do período industrial mecânico. De fato, a partir deste momento, surgem vários caminhos para a arte. Efetivamente vamos ver obras sendo produzidas para a op-art, a arte conceitual, a arte-objeto, os happenings, as instalações, a video-art, a sky-art, enfim, uma infinidade de linhas de pensamento artístico, definidas de maneira bem particular em relação as suas formas de representação. Todos em busca de uma visualização da unicidade orgânica dada pela linguagem sobre a qual estávamos a produzir conhecimento.

Assim, vamos encontrar Picasso, com um grande número de obras que explicitaram suas metamorfoses... e sua fecundidade inesgotável e ininterrupta (Paz 1977: 7), apresentando uma das características marcantes da modernidade. Encontraremos a serialidade nas diversas formas de produção, inclusive nas obras artísticas. Duchamp, por outro lado, autor de uma única obra, nega a pintura moderna fazendo dela uma idéia, um conceito, não concebendo a pintura como uma arte apenas visual. Segundo observou Octávio Paz, em seu livro *"O castelo da pureza"*, a pintura-idéia e os ready-made constituíam-se em *"alguns gestos e um grande silêncio"* (Paz 1977: 8); para Paz, eram as verdades e os conceitos, nos quais Duchamp enfatizava sua crítica a sociedade em que vivia e elaborava a sua negação à pintura na modernidade.

Figura da Arte Eletrônica

2.2.3. O ciclo industrial eletro-eletrônico

O homem descobre a energia elétrica e com ela nosso paradigma de percepção altera-se novamente. Agora, apoiados nos meios eletro-eletrônicos de produção, somos atingidos em nossos pensamentos pelas diversas formas de energia, em particular pela energia elétrica que nos encaminha em direção à luz e às velocidades que ela nos faz perceber.

A energia está presente em tudo que fazemos ou pensamos: na geração da força mecânica através das bobinas, na eletricidade que consumimos em nossas casas, no armazenamento dos dados através dos suportes magnéticos, na transmissão e recepção de informações do mundo digital, enfim, em todas as partículas do universo onde o elétron, o próton e o nêutron estão presentes. De fato, a velocidade de processamento a que somos submetidos, unidos aos mecanismos de armazenamento da informação, nos fazem ficar expostos às novas características de nosso produto final. A partir de agora, velocidade, conhecimento e decisão são elementos primordiais do processo produtivo e estão incorporados aos novos meios de produção. Detém o poder quem detém as informações, e detém as informações quem detém o domínio sobre os softwares e hardwares.

Para melhor compreendermos o estágio que nos encontramos, ainda em formação, é necessário relembramos que, a memória embutida em nossos equipamentos, aliada à automação de nossas máquinas, acrescenta velocidade ao que fazemos, permitindo maior rapidez, eficiência e expondo a humanidade a uma intensa troca cultural. Logicamente estas modificações perceptivas não aconteceram de uma só vez, nem se configuram instantaneamente, as mudanças de paradigma fazem parte de um processo de observação e elaboração que define e é definido através do uso das diversas linguagens. Assim, para compreendê-lo, é necessário que retomemos valores e pensamentos da história das artes plásticas, a fim de observarmos os processos de mudança que interferem significativamente em nosso atual paradigma de percepção.

Nos Estados Unidos vamos encontrar a action painting destacando os trabalhos de Jackson Pollock sobre telas, ele utilizava os gestos e o acaso para criar seus trabalhos, assim como Duchamp, quando incorporou ao seu *“Grande Vidro”*, a quebra casual de uma de suas peças centrais modificando a interpretação da obra. O artista americano, Pollock, foi um dos principais representantes da pintura gestual e afirmava que, no chão, se pintava à vontade; ali ele se sentia mais próximo da pintura; fazia parte dela; trabalhava em seus quatro lados e, literalmente, estava dentro da pintura (O’Hara 1960: 35).

Sem dúvida, nestes dois relatos vamos encontrar as marcas da energia humana e da natureza sendo incorporadas aos trabalhos de arte do período eletro-eletrônico. O ato de pintar telas no chão e os vidro quebrado do trabalho de Duchamp, estão repletos de ação, movimento e vitalidade. Pintar para Pollock significava observar sua elaboração nos vários ângulos possíveis e estando a tela no chão isto era possível. Destacando aqui, apenas a action-painting e a pop-art, dois movimentos basicamente americanos de artes plásticas. Enfim, está decretada a maioridade internacional da arte americana (Janson 1977: 664), pois, o poder, a muito já lhes pertencia. Após o final da Segunda Grande Guerra Mundial, quando os americanos junto com os aliados saem vitoriosos, nós vemos crescer significativamente a produção americana, em todas as áreas de conhecimento, particularmente nas artes.

Podemos dizer que a pop-art é uma das expressões desse poder. Suas imagens e representações estão baseadas nos meios de comunicação de massa da sociedade americana. E assim, negando a negação dos “ismos”, a pop-art não é antimoderna; é pós-moderna; e ainda, contrária ao dadaísmo, não é motivada por qualquer desespero ou repulsa em relação à civilização, mas sim, pela exaltação de seus modelos. Os artistas da pop-art exaltando as reproduções em série, como por exemplo, as histórias em quadrinhos, exploram positivamente todos os valores da sociedade de consumo. A simulação do mundo real também é uma das características deste movimento de arte. Os artistas constroem objetos plásticos em tamanho natural. Os trabalhos do artista e escultor Duane Hanson que modelava as pessoas, obtinha esculturas humanas em tamanho natural e que eram verdadeiras réplicas do modelo real e, assim, as características da sociedade que produz para as massas são levadas ao extremo, só faltando-lhe a vida.

Efetivamente, as artes, desde os ready-made de Duchamp até a computação gráfica e as redes informatizadas, operam sobre idéias, conceitos e signos. As criações plásticas e matemáticas geraram objetos e estruturas concebíveis apenas na mente humana. Em co-autoria com a máquina, o homem, a partir deste instante, elabora seus signos artísticos, dando novas formas e novos significados às suas produções. Tudo se transforma em meios de comunicação. Todos os sistemas de representação são possíveis e os objetos permitem que, deles, possamos extrair todas as interpretações possíveis e imagináveis. Hoje os meios de produção são observados como linguagem de comunicação, no qual os diferentes discursos são possíveis. Concordando com Lúcia Santaella, afirmamos, que toda e qualquer interpretação depende dos referenciais que sustentam o pensamento de quem o interpreta (1990: 58).

Aqui, vamos apresentar a ligação que existe entre a nossa dissertação de mestrado e está tese de doutorado. Retomando o *"insight"* que nos levou *as imagens matemáticas*, observamos que, entre as possíveis interpretações que poderiam ser realizadas, identificamos aquelas relacionadas às estruturas lógicas de organização das linguagens visuais e suas possíveis relações com a linguagem matemática. Segundo Arlindo Machado, a codificação eletrônica da imagem é feitas através de pontos e retículas de informações básicas de cor, tonalidade e saturação que aos nossos olhos aparentam realidade, mas o mundo real externo é mais que isto e nós sabemos. Ele ainda afirma, que as *"articulações de níveis abaixo da imagem"* (1984: 157), que são os píxeis das telas de televisão e dos computadores, não apresentam o mundo real, por mais próximos que pareçam dele estar. A lógica matemática, em particular a desenvolvida por Boole, estrutura nossas imagens digitais através dos bytes e de um sistema numérico binários, onde 0 e 1 representam a passagem ou não da energia pelos circuitos dos computadores, demonstrando que a visualidade gerada pelas novas mídias eletrônicas está totalmente vinculada à lógica dos modelos matemáticos.

Isto nos conduz diretamente ao mundo dos números e dos espaços que, ao refletir sobre o método axiomático, conhecido desde Euclides, definitivamente está às voltas com discussões abstratas e lógicas. Karl Weierstrass, George Cantor, H. E. Heine, J. W. R. Dedekind e muitos outros matemáticos estão formulando sobre a álgebra abstrata, a arimetização da matemática, o método hipotético-dedutivo, a teoria dos espaços de Riemann, a geometria diferencial e a evolução da lógica. Hilbert, em busca de elucidar a natureza do infinito, propõe a consistência total dos nossos modelos. No entanto, o *célebre teorema da incompletude de Kurt Gödel* mostra que isto não era possível de ser realizado. Os modelos tornam-se inconsistentes quando tentamos generalizá-los em suas infinitudes.

A partir desta demonstração, Gödel encerra com a proposta de Hilbert de encontrar uma linguagem e uma lógica que sirvam de formalização para todas as teorias matemáticas. E efetivamente a matemática rende-se à lógica. Neste instante surgem profundas reflexões sobre o pensamento lógico e sobre uma nova postura referente à natureza da matemática. Frege e Peirce introduziram uma fértil discussão na matemática. O primeiro acreditava que poderia deduzir a matemática da lógica e, assim, tentou mostrar que todas as expressões aritméticas, portanto a matemática, poderia ser definida em termos lógicos. Para isto, ele encaminhou um raciocínio que pretendia *"mostrar que toda as expressões aritméticas significam o mesmo que uma expressão lógica"* (Peirce 1983: 183). Já para o filósofo, lógico e matemático Charles Sanders Peirce

> *"a verdadeira lógica está baseada numa espécie de observação do mesmo tipo daquela sobre a qual se baseia a matemática, e essa é quase a única, ou senão a única ciência que não necessita de auxílio algum de uma ciência da lógica"* (Peirce 1975: 21).

Com isso, a lógica definitivamente ocupa seu espaço no mundo matemático e Tarski, Turing, Church, Zermelo e muitos outros, vão iniciar uma discussão que até hoje permanece entre nós, e que pretendemos abordar neste trabalho, qual seja: o objeto matemático refere-se a algo no mundo real? De fato, contatamos que a lógica e os modelos abstratos tomam conta das reflexões nesta ciência e, pensadores como Cauchy, Abel e Weierstrass, discutem os fundamentos de edificação desta ciência, tratando de encontrar apoios sólidos para a aritmética, a álgebra, o cálculo diferencial, o cálculo integral, enfim, toda a análise matemática. O método axiomático é o caminho lógico para a arimetização da análise, onde, a noção de espaço vetorial transforma nosso modo de perceber, operar e pensar sobre as geometrias. A "*dissociação entre objetos e operadores*" passa a ser o principal aspecto "*para a constituição de uma estrutura vetorial*" (Boyer 1974: 94). Riemann afirma que devemos pensar a geometria sem ser por pontos e isso nos *leva "à curvatura dos espaços riemannianos"*, sem a qual a *teoria da relatividade* de Einstein não poderia ter existido. Por outro lado, o famoso *"conceito de Cortes de Dedekind"* estabelece uma separação entre a análise matemática e a geometria e, então, passamos a formular nossas teorias com bases realmente abstratas e lógicas.

Devemos lembrar, ainda, da *"teoria das catástrofes"* de René Thom, que com seus modelos estabelece a projeção do descontínuo sobre o *"real",* um espaço imaginário que reflete sobre os modelos e sobre o princípio da continuidade. Operando sobre espaços integralmente abstratos, na teoria axiomática e nos procedimentos da lógica, os Bourbakis, grupo de matemáticos que elaboraram trabalhos em busca de uma formalização do conhecimento nesta ciência, desejou substituir os cálculos matemáticos por idéias. E assim, afirmaram que

> *"o que o método axiomático fixa como objetivo principal é exatamente o que o formalismo lógico por si não pode fornecer, ou seja, a inteligibilidade profunda matemática"* (Boyer 1974: 457*).*

Na matemática, algo semelhante está ocorrendo, os conceitos e fundamentos modernos da álgebra, aliados às topologias, aos espaços vetoriais e à teoria axiomática, geram a álgebra homológica que

> *"é o desenvolvimento da álgebra abstrata que trata de resultados válidos para muitas espécies diferentes de espaços"* (Boyer 1974: 457).

Sabendo claramente que não esgotamos todos os fundamentos, conceitos e conhecimentos matemáticos da atualidade, e nem o pretendemos fazer, dada a extensão desta área de conhecimento. Voltaremos a estes conceitos com mais profundidade no corpo de nossa tese de doutorado. No entanto, ao concluir este resumo sobre a nossa dissertação de mestrado, devemos destacar que, hoje, encontramos inúmeras formas lógicas de proceder: a lógica clássica, a lógica difusa, a lógica paracompleta, a lógica paraconsistente desenvolvida, entre outros, pelo brasileiro Newton Costa. Enfim, encontramos inúmeros modelos lógicos que nos permitem mostrar a infinidade de interpretações possíveis que estão diante de nós, inclusive diante daquilo que acreditávamos ser única: a lógica.

Tanto na matemática, quanto nas artes plásticas, nossos sistemas e linguagens, de agora diante, colocam-se diante de uma *"crise de representação"* generalizada (Plaza 1991: 45), portam-se como se estivessem esfacelados, mas, na verdade, apenas deixam claro que, através de nossa percepção, os fenômenos naturais e culturalmente construídos organizam-se segundo modelos que às vezes não estão totalmente determinados para os nossos sentidos, contudo, possuem características que possivelmente se estruturaram a partir de novos modelos de observação que concebemos, num processo contínuo de produção de conhecimento; uma metodologia de investigação científica.

Os novos meios de comunicação geram novos signos, que, por sua vez, abrem novas possibilidades de significação, e, assim, se pretendemos viver intensamente os dias de hoje, devemos estar em busca da compreensão dos significados desses signos que cada vez mais abrem suas portas à interação do homem com tudo aquilo que está ao seu redor, principalmente o que pode ser concebido em sua mente. Entre esses meios, destacamos aquele que, hoje, mais nos atingem, isto é, as novas mídias com seus *"códigos de baixo nível"*, seus píxeis, sua lógica binária ordenada segundo Boole, estruturando logicamente modelos, algoritmos e princípios matemáticos irremediavelmente incorporados aos atuais meio de comunicação. As imagens da computação gráfica simulando objetos, que em realidade não existem, através das codificações matemáticas, conduzindo-nos aos novos paradigmas de percepção do período eletro-eletrônico. Este processo de elaboração de conhecimento permite-nos unir a produção e o consumo deste meio, num princípio único, simulando, através destas máquinas eletrônicas, ambientes que estão relativamente próximos àqueles estabelecidos pelo nosso sistema nervoso central (Mcluhan 1964: 391).

Hoje, olhando para nossas produções como elos de um processo cognitivo único, onde mente e mundo fazem parte de um mesmo ecossistema, verificamos que convivemos, intimamente, com a lógica binária e com o mundo digital e, assim, a arte e a matemática unem-se em busca de suas similaridades. O perfil produtivo do momento em que vivemos, está apoiado nos conceitos e procedimentos lógicos matemáticos de nossos equipamentos digitais e está associado aos novos modos de representação, que as diferentes linguagens de comunicação permitem. Os signos matemáticos, cada vez mais, fazem parte e organizam os fundamentos lógicos de todas as outras formas de linguagem do homem, em particular, destacamos as *imagens matemáticas* que unem imagens visuais a imagens mentais e junto com ela a ciência da matemática.

2.3. As imagens eletrônicas

Detém o poder quem detém os programas dos computadores, que, ao mesmo tempo em que processa o cálculo para o lançamento das espaçonaves, modela os objetos imaginado pelo homem. Através dos meios eletro-eletrônicos de produção e de sua capacidade de armazenar e processar rapidamente as informações, podemos simular vários ambientes, inclusive aqueles concebidos mentalmente por nós. Hoje, acrescentamos um elemento novo às nossas elaborações lógicas, qual seja: podemos simular praticamente tudo ao nosso redor, inclusive aquilo que criamos em nossa mente através dos programas computacionais.

De acordo com Milton Sogabe, o poder de simulação destes novos ambientes, unidos aos signos matemáticos e lógicos de nossas linguagens de programação, revelam-nos *“imagens sínteses”,* imagens em processo que

> *”não representam nada e não têm qualquer tipo de contato físico com algo preexistente: são apenas uma série de informações numéricas”* (1996: 114).

As imagens geradas por estes meios não nascem de algum tipo de percepção visual sensível à luz, e também, não fazem referência a qualquer real existente. Cada vez mais, são simulações e representações de objetos abstratos que existem apenas em nossas mentes, assemelhando–se, em muito, aos signos matemáticos. A possibilidade de geração de um número infinito de simulações, uma das características de nosso tempo, evidencia um grande número de similaridades entre essas duas linguagens. Assim, através de um processo de elaboração semelhante ao matemático, pretendemos estar observando outro modelo axiomático de formulação de linguagem, em particular, *as imagens matemáticas*.

A partir de agora, vemos que estes signos estão relacionados às questões da visualidade das representações concebidas diante das novas tecnologias que, em suas características fundamentais, estão intrinsecamente ligados aos objetos matemáticos. Estas formas de linguagens, porque estão estruturadas em axiomas, conceitos e princípios lógicos, utilizados na matemática, são semelhantes a ela. E, de fato, o foco deste estudo é analisar quanto de matemático há nestas representações, em particular, quanto de matemática há nos signos visuais gerados por estes meios.

Há muito tempo os aspectos dos signos visuais têm sido, exaustivamente, estudados. Constatamos que existem disponíveis inúmeras pesquisas sobre as imagens e a visualidade delas. Encontramos trabalhos que analisam as imagens pelos seus estímulos visuais, pelos suportes e dispositivos que as geram, pelos aspectos relacionados ao interpretante que as observa, aos contextos em que estão inseridas, às questões econômicas, políticas, ideológicas, estéticas e psicológicas. Em resumo, encontramos uma infinidade de pesquisas e pontos de vista que observam as imagens a partir de vários pontos de vista. Por isso não entraremos em detalhe sobre todos estes temas, até porque, isto desviaria nossa atenção do que pretendemos focar com este texto. Então, apenas nos limitaremos em indicar alguns trabalhos sobre estes temas, que acreditamos serem importantes e o passo inicial para qualquer pesquisa nesta área.

O primeiro deles é *"A imagem",* de Jacques Aumont (1993), que trata das imagens como modalidades particulares e, para isto, examina-as pelos aspectos mais elementares e comuns, como: sua natureza, sua forma, seu uso e seu modo de produção, olhando sempre através de um modelo básico de organização das imagens. O segundo é o livro, "*Imagem",* de Lúcia Santaella e Winfried Nöth (1998). Nele destacamos a análise realizada sobre a imagem, fundamentada na visão semiótica de Charles Sanders Peirce. Santaella e Nöth elaboram uma profunda reflexão dos problemas filosóficos que assolam o pensamento contemporâneo e as imagens produzidas por ele. Para estes autores, as questões sobre verdade e falsidade das representações com imagens, as representações mentais, a mediação tecnológica, a intervenção das mídias na cultura elétrica e eletrônica, e, finalmente, as relações entre imagem e linguagem verbal, são alguns dos temas discutidos por eles. Além disto, tão importante quanto os trabalhos propriamente dito, são as inúmeras referências bibliográficas indicadas pelos dois textos. Elas são suficientes para iniciar e encaminhar qualquer tipo de pesquisa nesta área do conhecimento. Para melhor compreensão dos aspectos que abordaremos em nossa tese, estes dois livros são básicos, pois tratam dos temas que evitamos por não serem nosso alvo de estudo.

Em seguida, indo diretamente ao tema que pretendemos abordar, citaremos vários textos e artigos que analisam as imagens em relação aos meios de produção que as suportam, em particular, as imagens geradas pelas novas mídias eletrônicas. O *"Journal of the Internacional Society for the Arts, Sciences and Technology*" dedicou, para este tipo de imagem, um exemplar especial de sua coleção, em 1992, que foi denominado de "*Visual Mathematics*". Nele verificamos diversas reflexões tratando das imagens e de suas formas de geração através dos novos meios eletrônicos de produção. Destacamos *"Visualization in art and science"* (Brisson 1992: 257), *"Caricature, ready mades and metamorphosis: Visual mathematics in the contexto of art"* (Cox 1992: 295) *e "New representative methods for real and imaginary environments"* (Frisia 1992: 369). Todos eles abordando as imagens sobre o contexto matemático.

Ainda, dentro deste mesmo tema, vamos encontrar vários autores analisando as imagens geradas pelas novas mídias eletrônicas como sendo: *"imagens sem olhar"* (Sogabe 1996: 113), aquelas que se concretizam a partir de processamentos numéricos dos computadores; *"imagens sintéticas"*, herdeiras ao mesmo tempo da matemática e da arte (Poissant 1997: 89), imagens que geram uma *"ordem visual numérica"* (Couchot 1982: 42), ou ainda, "*imagens em potencial*" e "*imagens sínteses*", todas elas dando ênfase ao caráter abstrato, lógico e virtual destes modelos de representação. Apesar do grande número de textos que tratam deste tema, pelos diferentes ângulos de percepção e interpretação, verificamos em nossa pesquisa bibliográfica que existem pouquíssimos estudos discutindo as imagens, tendo como foco os aspectos matemáticos e topológicos. Assim, principalmente por este aspecto, este trabalho torna-se relevante.

As novas tecnologias de comunicação trazem embutidas em sua lógica de construção, o conhecimento que, fundamentalmente, está presente na ciência matemática (Hildebrand 1994: 137). Os computadores iniciaram processando informações a partir de uma lógica binária, que, em última instância, pode ser olhada como representações numéricas de impulsos elétricos, onde o *zero* representa o instante que não passa energia nos cabos e circuitos de nossas máquinas e o *um* representa o oposto disto. De fato, estamos observando um princípio lógico que dá suporte às novas mídias eletrônicas em seu nascimento, oriundas do mesmo universo simbólico que é a matemática.

Na seqüência, verificamos algumas modificações nestes princípios, depois da demonstração do “Teorema das Quatro-Cores” e do “Teorema de Classificação dos Grupos Finitos Simples” devemos estar atentos aos vários tipos de computação não convencionais que começam a tomar conta das nossas formas de produção. Estes novos processamentos lógicos baseados em outros princípios que são diferentes da lógica clássica, assim como, a lógica fuzzy, a paraconsistente, a quântica e a computação baseada no DNA, modificam nossos paradigmas. Entre os mais recentes choques cognitivos, dos quais nos fala Marcus, e que analisaremos neste trabalho, vamos encontrar aquele que resulta da marginalização da energia através da informação, este processo vem sendo desenvolvimento pela *teoria da informação do algoritmo*, por Kolmogorov e Chaitin (Marcus 1997b: 7).

Hoje podemos dizer que, diante das novas mídias e dos vários princípios lógicos que podem ser elaborados pelos nossos softwares, passamos a conviver com a possibilidade de criar novos ambientes de percepção, nunca antes vivenciados. E, assim, através dos computadores, das novas lógicas na linguagem de programação e de uma grande variedade de formas de visualizar ambientes virtuais, podemos simular situações com as *imagens sintéticas* impossíveis de serem construídas longe deste universo digital.

Ao analisar *as imagens matemáticas,* sabemos estar lidando com uma vasta gama de conhecimento e, assim, finalizando os aspectos que queremos ressaltar neste estudo, devemos comentar que, ainda de maneira vaga e intuitiva, sabemos estar observando fenômenos que possuem um nível de complexidade muito elevado e, com características bem mais abrangentes do que podemos estabelecer neste trabalho. No entanto, em primeira instância, nosso objetivo é realizar uma abordagem semiótica do signo matemático dando ênfase às questões lógicas da visualidade diante dos novos meios de produção. Assim, contribuir para atingir novos níveis de complexidade através das análises que realizaremos das representações visuais dos modelos matemáticos. Pretendemos, também, verificar neste estudo a tendência que todas as ciências tem a matematização. Para Santaella e Nöth, fundados nos pensamentos de Peirce, todas as ciências caminham para *"aumentarem gradualmente seu nível de abstração até se saturarem na matemática, quer dizer, a tendência de todas as ciências é se tornarem ciências matemáticas. O conglomerado de ciências, que hoje recebe o nome de ciência cognitiva, parece estar no caminho de comprovar essa sugestão"* (1998: 90).

Assim, as imagens computacionais que são construídas e, em seguida, são destruídas para darem lugar às outras imagens que as substituíram, pois elas existem durante o tempo de processamento e de exposição em nossos sistemas de percepção, são *"imagens em processo"* ou *"imagens virtuais"* de modelos lógicos intrinsecamente ligados às novas mídias. Finalizando os aspectos que pretendemos analisar neste trabalho, devemos dizer ainda que, de maneira secundária, mas não menos importante, observaremos as imagens fractais, os grafos de modo geral e *os grafos existenciais* de Peirce que nos conduzem às belezas explicitadas nas formas e raciocínios lógicos e a estética destas formas.

As *imagens matemáticas* são concepções visuais em processo que adquirem valores diferenciados quando são compreendidas relacionadas às linguagens que as geram. Observar esses aspectos associados às novas tecnologias, nos leva a conectar três realidades aparentemente distintas: primeiro a questão da visualidade destas imagens, que, através do processo criativo, expõem características diagramáticas, em segundo lugar, a questão operacional da construção da linguagem matemática em si e, em terceiro os aspectos mentais e simbólicos necessários na realização deste tipo de conhecimento. Devemos dizer, ainda, que não pretendemos ser exaustivos em nossas observações e análises, mas sim, trabalhar no sentido de efetuar uma primeira abordagem do tema que, certamente, é muito mais profundo e complexo do que podemos considerar neste texto e que possui interfaces com os mais variados campos da ciência humana. Concluindo esta introdução, podemos afirmar que o nosso principal objetivo é realizar *"um estudo semiótico dos espaços topológicos matemático e suas representação diante das novas tecnologias".*

3. FUNDAMENTAÇÂO TEÓRICA

É evidente que não pretendemos tratar da Teoria Semiótica de Charles Sanders Peirce em toda sua extensão, dada a complexidade e amplitude dos conhecimentos gerados por ele. Para se ter uma idéia, ele elaborou um Diagrama Classificatório das Ciências, que estaremos analisando no decorrer deste capítulo, o qual classifica as ciências concebidas pelo homem através de sua visão pansemiótica do mundo. Para elaborar este projeto, ele precisou conhecer: matemática, ética, metafísica, gravitação, astronomia, psicologia, fonética, economia, história da ciência, jogos de carta, os homens e as mulheres, vinho, metrologia, enfim, muitas áreas do conhecimento humano, a fim de estabelecer suas categorias universais do pensamento. Realmente, ele estudava todos esses segmentos de conhecimento por causa da semiótica, que é, como ele mesmo afirmou, sua verdadeira e única área de interesse (Nöth 1995: 64).

Aqui, analisaremos apenas alguns pontos de sua semiótica geral, pois pretendemos abordar somente aspectos que consideramos necessários para a compreensão deste modelo. Para isso, tomemos como ponto de partida o ambicioso projeto de Peirce de encontrar um número finito de categorias que pudesse servir para classificar a diversidade dos fenômenos do universo. Sua filosofia foi estruturada numa Classificação Fundamental dos Fenômenos baseada em três categorias do pensamento: *Firstness, Secondness* e *Thirdness,* que foram traduzidas por: *primeiridade, segundidade* e *terceiridade*.

3.1. As três categorias universais

Para Peirce, primeiridade é o acaso, o espontâneo, a indefinição e o sentimento. A segundidade está presente onde identificamos a alteridade, a matéria, o conflito, a ação e a reação. E a terceiridade é a lei, a inteligência, a generalidade e a continuidade. A fenomenologia peirceana foi radicalmente reduzida a três categorias capazes de abarcar a multiplicidade dos fatos no mundo. Para ele, segundo Ivo Assad Ibri, em toda a observação fenomenológica

> *"... surge a idéia de outro, de alter, de alteridade e com ela aparece a idéia de negação, a partir da idéia elementar de que as coisas não são o que queremos que sejam nem, tampouco, são estatuídas pelas nossas concepções. A binariedade presente neste se opor, traz consigo a idéia de segundo em relação a [um primeiro], constituindo uma experiência direta, não mediatizada. Parece que algo reage contra nós, fazendo-nos experienciar uma dualidade bruta, um elemento de conflito que na "...ação mútua entre duas coisas sem considerar qualquer tipo de terceiro ou meio e, em particular, sem considerar qualquer lei de ação"* (Ibri, 1992: 7).

Desta maneira, partindo do conceito de confronto, diferença ou oposição entre dois fenômenos, introduzimos a segundidade. A idéia de segundo está presente na concepção de ação que prevê uma reação. A *díade* é segundidade e também é aquela que:

> *"... põe os sujeitos juntos, e atribui uma característica a cada um deles. Estas características, em algum sentido, são duas. A díade possui também dois lados, de acordo com o sujeito que é considerado como primeiro. Esses dois lados da díade formam segundo par de sujeitos ligados a ela; e possuem o seu modo de união"* (Peirce, 1983: 91).

A *díade* coloca-se genuinamente como segundo, assim como, a força, o choque, o sentido de mudança, o conflito, a existência e a binariedade, enfim, toda idéia de outro ou de alteridade, contrapondo-se a um existente. Esse conceito, sem muito esforço, remete-nos obrigatoriamente ao conceito de primeiro, de *mônada*, que existe para se opor a este segundo. Algo age se tiver com o que reagir, isto é, seu primeiro. A primeiridade em Peirce é indivisível e está ligada a sentimento, ao acaso e a mera qualidade. A primeiridade é o que está presente, o imediato, o original e o espontâneo. Se pensarmos no presente ele já não existe, pois no momento em que tentamos capturá-lo, ele se foi e já é passado. O conceito de *mônada,* segundo Leibnitz, está no despertar histórico de alguns instantes e é aquilo que vive *"entre o sono e a vigília"* e nos traz à mente algo que não pode ser partido e por isto é a unidade.

> *"Leibnitz chega... à noção de mônada mediante a experiência interior que cada indivíduo tem de si mesmo e que revela como uma substância ao mesmo tempo una e indivisível. ... [ela] não tendo 'portas nem janelas', não recebe seu conhecimento de fora, mas têm o poder interno de exprimir o resto do universo, a partir de si mesma; a mônada é um ponto de vista"* (Leibnitz 1983: 99).

Na mesma forma univocamente determinada da *mônada,* vamos encontrar a primeiridade que é aquilo que é indivisível; é a categoria do sentimento sem relação, conexão ou oposição com qualquer outra coisa; é a possibilidade de existência; é a liberdade e a qualidade não definida das coisas. Segundo Peirce, primeiridade é a forma de ser do que é tal como é, positivamente e sem se referenciar a qualquer outra coisa (CP 8.328).

> *"Vá sob a abóbada celeste e olhe para o que está presente tal como aparece aos olhos do artista. O modo poético aproxima o estado no qual o presente surge como presente... O presente é apenas o que é, sem considerar o ausente, sem relação com o passado e o futuro... A qualidade de sentimento é o verdadeiro representante psíquico da primeira categoria do imediato tal qual é em sua imediatidade, do presente em sua positi-*

va e direta presentidade... A primeira categoria, então, é Qualidade de Sentimento ou o que quer que seja tal como é, positivamente, e em relação com nada mais" (Ibri, 1992: 11).

Capturar esse conceito é como poder registrar a consciência em sua totalidade em um determinado instante. Portanto, primeiridade é consciência imediata assim como ela é; é pura qualidade de sentir; é a consciência indivisível no espaço e no tempo. A relação de ruptura e de confronto está em colocar lado a lado primeiro e segundo, produzindo uma mediação entre duas idéias. Isto conduz a um pensamento que se expressa através do signo, que é o resultado da mediação.

A mente inquietada pelo confronto entre dois elementos, busca o repouso e, nesta busca, encontra na camada da inteligibilidade a terceira categoria, a mediação que se expressa numa síntese intelectual. De fato, a terceira categoria ou a terceiridade como Peirce denominou-a, é uma idéia do que é tal qual é, por ser um terceiro ou meio que se estabelece entre o segundo e seu primeiro. É o mesmo que dizer que ele é a representação como elemento do fenômeno (Santaella 1987: 112). Na idéia de terceiridade estão embutidos os conceitos de inteligência, generalidade, lei, crescimento, continuidade, pensamento e signo como representação de algo, assim, estabelecendo a continuidade entre a experiência e o pensamento, verificamos que:

"para conhecer e compreender qualquer coisa, a consciência produz um signo, ou seja, um pensamento como mediação irrecusável entre nós e os fenômenos. E isto, já ao nível do que chamamos de percepção. Perceber não é senão traduzir um objeto de percepção em um julgamento de percepção, ou melhor, é interpor uma camada interpretativa entre consciência e o que é percebido" (Santaella 1987: 68).

Da intuição ao pensamento a consciência mostra-se lógica e contínua. As Categorias Fenomenológicas de Peirce mostram essa continuidade quando vão da percepção do fenômeno, em primeiridade, à consciência em total liberdade, rompendo-se na segundidade através da alteridade e integrando as oposições em dualidade, mantendo suas características através da continuidade. Em seguida, a consciência, diante da observação do fenômeno, já em segundidade, busca a resistência no processo de mediação, e finalmente, em direção à terceiridade elabora uma síntese intelectual, em pura generalização, estabelecendo uma relação sígnica; o pensamento. Vejamos este mesmo raciocínio no processo de semiose, nas palavras de Peirce:

> *"Parece, portanto, que as verdadeiras categorias da consciência são: primeira, sentimento, a consciência que pode ser compreendida como um instante de tempo, consciência passiva da qualidade, sem reconhecimento ou análise; segunda, consciência de uma interrupção no campo da consciência, sentido de resistência, de um fato externo ou outra coisa; terceira, consciência sintética, reunindo tempo, sentido de aprendizado, pensamento"* (Peirce 1977: 14).

Relacionando passado ao futuro e construindo o presente, o pensamento permeia estes vários momentos, e determina-se contínuo. Os fatos vividos estabelecem o rumo de nossas ações tendo o futuro como modelador de nossa conduta e, assim, a noção de continuidade está presente, não somente no pensamento, mas em tudo que fazemos. A produção de conhecimento não é uma ação, exclusiva da mente humana, mas sim, de um processo que se origina na percepção dos fatos que são observáveis no mundo que, por sua vez, estimulam nosso raciocínio lógico, e que, apoiados em uma determinada linguagem, através de nossas ações e dos signos, geram conhecimento e novos fatos observáveis, num círculo interminável de produção de conhecimento.

> *"Do ponto de vista cognitivo, a díade da primeiridade (mente, a fonte da cognição) e da segundidade (matéria, o objeto da cognição) precede a terceiridade, que é o processo dinâmico (evolucionário) da cognição e da semiose como mediação entre primeiridade e segundidade"* (Nöth 1996: 243).

A semiose, assim como a ação do signo, deve ser composta por três constituintes que são relativos às três categorias universais: o signo, a coisa significada e a cognição produzida na mente (Nöth 1995: 67). Como queria Peirce, o processo sígnico deve ser constituído por três entidades relacionadas entre si: o fundamento, que é o primeiro, e se relaciona com um segundo, que é o objeto, ao qual o signo se refere ou está no lugar; os dois são capazes de determinar um terceiro, o interpretante. Assim, de modo unificado vamos encontrar as categorias universais peirceanas e a concepção sígnica apoiada nos três correlatos do signo: o *representamen*, o *objeto* e o *interpretante,* que estão totalmente relacionados a primeiridade, segundidade, e terceiridade, assim como toda a obra deste filósofo americano.

3.2. O signo

Para Peirce este complexo sistema está fundado na percepção e não há separação entre ela e o conhecimento. Todo pensamento é um signo, assim como todo conhecimento se dá na percepção e se concretiza na ação deliberada, através de uma síntese. O processo cognitivo é contínuo e integralmente determinado e se constitui em um sistema de transformação que tem início na percepção dos fatos que, por sua vez, aciona nossas mentes e coloca o nosso pensamento em ação, para finalmente, através de uma mente interpretante singular, ir em busca do repouso, subjugada pelos nossos hábitos e valores. Num processo contínuo de semiose somos levados a produzir novos pensamentos ou novos fatos observáveis, e, assim, sucessivamente, o processo é realimentado.

Lúcia Santaella, diante da filosofia semiótica, afirma que não deve existir separação entre a percepção e a cognição e, ainda, que os fundamentos peirceanos podem ser apresentados como uma teoria da percepção. Para ela,

> *“todo pensamento lógico, toda cognição, entra pela porta da percepção e sai pela porta da ação deliberada. Além disso, a cognição e, junto com ela, a percepção são inseparáveis das linguagens através das quais o homem pensa, sente, age e se comunica. Daí a teoria da percepção peirceana estar intimamente ligada à sua teoria dos signos, que, por sua vez, está fundamentada numa lógica tri-relativa, altamente rigorosa, que não separa os processos mentais, e mesmo os sensórios, das linguagens em que eles se expressam"* (Santaella 1993a: 16).

De posse destes argumentos, podemos perceber que a noção de signo de Peirce, assim como é fundamental para a compreensão de sua obra, também o é para a compreensão deste nosso trabalho, e, desse modo, voltemos a detalhar o processo de construção do signo, nas palavras de Peirce, para que tenhamos total compreensão deste conceito. Para ele,

> *"um Signo, ou Representamen, é qualquer coisa que representa algo para alguém, sob certo aspecto ou de algum modo. O Signo dirige-se a alguém, isto é, cria na mente desta pessoa um Signo equivalente ou talvez um Signo melhor desenvolvido. O que o Signo cria eu denomino de Interpretante do primeiro Signo. O Signo representa alguma coisa: seu Objeto. Ele coloca-se no lugar desse Objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de idéia que eu denomino por vez de Fundamento [ground] do Signo ou do Representamen ..."* (CP 2.228).

E neste sentido, o signo é algo em constante evolução e pode ser definido como uma função matemática que se constitui na medida em que cria um relacionamento entre três entidades, que são: o *Representamen,* o *Objeto* e o *Interpretante*. Assim sendo, entender esta relação como algo em processo é básico para a compreensão do modelo triádico de representação de Peirce.

Detalhando ainda mais este conceito, lembremos sempre que a noção de interpretante não é de alguém que pode ser um intérprete do signo, mas como uma mente interpretadora que se coloca diante do processo de representação e dele extrai um significado. Deste modo, ao associar o signo ao objeto a que ele se refere, em busca de uma síntese de pensamento, o interpretante produzirá um outro signo dando vida a este modelo sistêmico. E de fato, o significado de um signo é definitivamente outro signo. Ele é uma relação que deve ser percebida em processo e que nunca se esgota, pois, no instante em que isto acontecer, a mente interpretadora se aquietará, e isto só acontece quando o processo de formação do signo está concretizado. Porém, não temos um fim, pois imediatamente após o processo se efetivar, vamos em busca de um novo processo de significação para o objeto referencial, e isto ocorre infinitas vezes com outras sínteses que gere novos signos e fatos.

"Os signos são dinâmicos e evoluem, permanecendo sempre abertos a novas possibilidades de atualização" (Laurentiz 1999: 93).

A semiose como um processo relacional lógico está associado ao conceito de signo que ora analisamos, onde o signo em si, o objeto e o interpretante agem simultaneamente. O signo é constituído por um significante, denominado por Peirce de *representamen* ou ainda, de fundamento, como já constatamos, que sempre nos remete a um objeto de referência. Invariavelmente, o objeto está ausente no momento da ação sígnica. Daí, completando esta relação, encontramos o interpretante diante deste processo mental executando uma síntese; construindo na mente interpretadora um significado; uma segunda imagem deste mesmo objeto, um outro signo. Ele

"... pode ser 'uma coisa material do mundo', do qual temos um 'conhecimento perceptivo' (CP 2.230), *mas também pode ser uma entidade meramente mental ou imaginária 'da natureza de um signo ou pensamento'* (CP 1.538)*. Peirce até distingue uma terceira possibilidade do 'ser' do objeto, além do perceptível e do imaginável: algo que é 'inimaginável num certo sentido' ... 'o signo pode apenas representar o objeto e falar sobre ele; mas não pode proporcionar familiaridade ou reconhecimento desse objeto [...] O objeto do signo pressupõe uma familiaridade a fim de veicular alguma informação ulterior sobre ele' "* (CP 2.331).

Tudo isso acontece como um produto da consciência que nos remete diretamente à terceiridade, onde as palavras, pensamento, consciência, generalidade, continuidade, crescimento, inteligência podem melhor representar o conceito. Peirce ainda afirmava que,

"se o signo é algo distinto de seu objeto, deve haver, no pensamento ou na expressão, alguma explicação, argumento ou outro contexto que mostre como, segundo que sistema, ou por qual razão, o signo representa o objeto ou um conjunto de objetos" (Peirce 1977: 47).

Matematicamente, poderíamos definir signo como uma relação dada pela seguinte fórmula $S_1 = R(S_0, O_0, I_0)$ onde S_1 é o instante em que o signo se concretiza e que a mente interpretadora conclui seu processo de síntese ou o processo de semiose. Nesta igualdade identificamos S_0 como o *fundamento* deste signo, ou seja: é o *representamen*, segundo Peirce; é o signo primeiro que se altera à medida em que o processo de semiose se efetiva; o O_0 é o *objeto* ao qual o signo faz referência e I_0 é o *interpretante* que, unido aos outros dois, define o signo e a relação terna onde temos *o representamen, o objeto e o interpretante*; o S_1. Num processo interminável de semioses podemos dizer que, após ter sido concebido, o signo S_1 imediatamente transforma-se em *fundamento* e a mente interpretadora, automaticamente, irá conceber um novo processo semiótico, isto é, um $S_2 = R(S_1, O_1, I_1)$ e assim sucessivamente teremos S_3 dependente de S_2, S_4 de S_3, S_5 de S_4..., todos associados aos seus respectivos objetos e interpretantes semelhantes em instantes diferenciados. Deste modo, podemos dizer que um signo é outro signo, que é outro signo e assim por diante.

Uma das características da obra peirceana são os níveis de complexidade que os conceitos vão adquirindo na medida em que vamos penetrando nos conhecimentos estabelecidos por ele. Sua obra é como degustar vinho, a cada gole, aprendemos a conhecê-lo melhor e a saboreá-lo mais profundamente. Assim, cumprida a primeira etapa de entendimento do conceito sígnico, no qual devemos ter entendido que ele é um processo relacional que cria numa mente interpretadora outro signo, diferente do primeiro, e assim consecutivamente num processo infinito. Vamos, então, dar mais um passo no sentido de decifrá-lo melhor, e, diante das três categorias universais, devemos acrescentar que ele pode ser compreendido como uma relação composta pelo representamen em primeiridade, dois objetos: imediato e dinâmico, em segundidade e três interpretantes: imediato, dinâmico e final, em terceiridade. Detalhemos, agora, cada um destes aspectos.

3.2.1. O representamen do signo

O *representamen* ou *fundamento* é o primeiro correlato do signo. Ele é algo que dá condições para que algo se apresente diante de nós como signo. Segundo Peirce é o *"objeto perceptível"* (CP 2.230) que se apresenta como signo para uma mente interpretadora. Ele também é *"o veículo que traz para a mente algo de fora"* (Peirce *apud* Nöth 1995: 69). Ele é a primeiridade do signo que é relativamente difícil de ser compreendido, na medida que não opõe a nada. Ele é a mônada.

3.2.2. Os dois objetos do signo

O segundo correlato do signo é aquele que corresponde, de forma aproximada, à coisa representada. O *objeto imediato* é a maneira pela qual o *objeto mediato* ou *dinâmico*, aquele que o signo substitui, se representa dentro do signo. Para Peirce,

> *"deve-se distinguir entre o objeto imediato, isto é, o objeto como é representado no signo, e o objeto real (...), ou antes, dinâmico, que, pela própria natureza das coisas, o signo não consegue expressar, podendo apenas indicar , cabendo ao intérprete descobri-lo por excelência colateral"* (Peirce 1983: 111).

3.2.3. Os três interpretantes do signo

O terceiro correlato do signo é o interpretante. Ele é o que atribui ao signo o poder de ser uma representação. O interpretante, de acordo com o sistema triádico de Peirce, é composto por três classes mais desenvolvidas de interpretantes: o *interpretante imediato*, o *dinâmico* e o *final*.

O *interpretante imediato* é a vaga qualidade da interpretação a ser produzida numa mente interpretadora qualquer; é aquilo que o signo pode desperta antes de chegar ao intérprete propriamente dito; é a potencialidade de interpretação. Peirce afirma que o interpretante imediato

> *"é o efeito inanalisado total que se calcula que o signo produzirá ou naturalmente poderia se esperar que produzisse, o efeito que o signo produz*

primeiro ou pode produzir sobre uma mente , sem nenhuma reflexão sobre ele mesmo" (Peirce *apud* Nöth 1995: 77).

Já o interpretante dinâmico é o que realmente é produzido pela mente interpretadora. Sempre nos referimos a uma mente interpretadora, porque a interpretação está além da mente singular de cada intérprete. E, assim, o interpretante dinâmico é o que efetivamente pode ser produzido pelo signo numa mente singular; é aquilo que o interpretante individualizado, no ato da interpretação, realmente observa e é diferente em cada processo sígnico de interpretação. Em suas reflexões sobre os interpretantes, Santaella, em "Assinatura das coisas", ao analisar o ato de interpretação, refere-se nitidamente ao interpretante dinâmico.

"O que o intérprete faz ao receber o signo, é promover uma interpretação efetiva, singular, falível, psicológica, relativa. Cada interpretação singular, por cada intérprete singular, tem algo de irrepetível (o acontecimento que não volta mais), porém tem algo de geral e coletivo, o que faz a interpretação ser comunicável" (1992: 196).

Neste trecho podemos identificar claramente o interpretante dinâmico em ação e assim, efetivamente identificá-lo no processo mesmo da interpretação; interpretando. Por fim, devemos voltar nossa atenção para o *interpretante final* em terceiridade, já que, o interpretante dinâmico aparece em segundidade, na ação entre o signo e a mente interpretadora no efetivo ato da interpretação. Se pudéssemos agrupar todas as interpretações de um signo, na singularidade das interpretações possíveis, encontraríamos o interpretante final daquele signo em certas condições determinadas.

"É aquilo que seria finalmente decidido se a interpretação verdadeira e se a consideração do assunto fosse continuada até que uma opinião definitiva resultasse [...] aquele resultado interpretativo ao qual cada intérprete está destinado a chegar se o signo for suficientemente considerado" (CP 8.184).

O interpretante final, junto com os ideais últimos, é aquele que buscamos incessantemente e nunca se realizará por completo, pois senão o signo deixaria de ter vida e teria esgotado todas as suas possibilidades de interpretação.

Suponhamos que eu diga: *zero*. Este é um signo que será desenvolvido em minha mente. Assim, enquanto qualidade que é, e sem sofrer qualquer alteração interpretativa é um fundamento, o seu objeto imediato é a “noção” que isto possa significar, as aparências e as qualidades que ele desperta, entre muitas possibilidades, como algo que dá origem ao ato de contar, que conhecemos. O objeto dinâmico é o número em si, como uma imagem mental de zero e, certamente, ao ser escrito aqui no papel é o signo de um algo que é seu objeto dinâmico e é o que ele representa, isto é, o zero propriamente dito. Estamos, ainda, diante do embate físico entre o signo em si e seus dois objetos: o imediato e o dinâmico. A mente interpretadora não entrou em ação e só passa a participar do processo de significação, quando o interpretante imediato, tal qual um esquema, começa a agir sobre a nossa imaginação. Ela é vaga e está diante de infinitas possibilidades interpretativas. O passo seguinte é a interpretação que se aloja em minha mente, de modo singular, dizendo que este conjunto de letras representa algo, que é nulo. O interpretante dinâmico toma conta da situação quando algum intérprete identifica que aquele é o zero e que, na singularidade de uma interpretação, pode estar significado a falta de algo, o vazio ou a inexistência de qualquer quantidade de coisas. O interpretante final é a soma de todas as interpretações possíveis para este zero, inatingível nas infinitudes de possibilidades interpretativas que existem.

3.3. As 10 classes de signo

Definida a relação triádica na base do pensamento de Peirce, através das quais brotam as três categorias de classificação dos fenômenos: primeiridade, segundidade e terceiridade e o processo semiótico ao qual é submetido o pensamento, voltemos a acrescentar reflexão no conceito de signos. Outra vez, aumentamos o grau de complexidade de nossa percepção sobre a relação sígnica e sobre a relação dos seus três componentes: representamen, objeto e interpretante. Peirce, considerando a possibilidade de combinar as três categorias, identificou um sistema de dez classes dos signos.

> *"As relações triádicas são divisíveis em três modos, por tricotomia, conforme o primeiro, o segundo e o terceiro correlato forem, respectivamente, mera possibilidade, existente real ou lei. Estas três tricotomias, tomadas em conjunto, dividem todas as relações triádicas em dez classes. Estas dez classes terão certas subdivisões conforme os correlatos existentes forem sujeitos individuais ou fatos individuais, e conforme os correlatos que são leis foram sujeitos gerais, modos gerais do fato ou modos gerais da lei"* (Peirce 1977: 50 pr. 238).

Para compreendermos as dez classes sígnicas, devemos antes, entender seu sistema de relacionamento. Obviamente, já temos sedimentado em nosso pensamento que são três as categorias universais e a relação sígnica é composta por uma tríade. Assim, de acordo com a primeira tricotomia o representamen, fundamento ou

> *"signo em si mesmo será pura qualidade, um existente concreto ou uma lei geral"* (CP 2.243).

Diante das três categorias, na relação do signo consigo mesmo ele pode ser quali-signo, sin-signo e legi-signo, respectivamente associados à primeiridade, segundidade e terceiridade. O quali-signo é um quase-signo, pois nunca se realiza totalmente, na medida em que a qualidade precisa de lugar para se corporificar e, assim que isto acontece, ele já não é mais primeiridade, e passa a ser um *"existente concreto",* e com isto passa também a ser segundidade e na classificação peirceana é o sin-signo. Ele é um signo singular que, como tal, deve existir realmente, diferente do quali-signo que por ser qualidade, apenas está presente em uma mente interpretadora num sentido vago e indivisível.

Retomemos, o exemplo *zero*. Ele é quali-signo, não quando representa o valor nulo, pois, neste momento, ele já corporificou o seu valor de neutralidade em relação a uma quantidade qualquer e, por isso, é sin-signo. De fato, estamos considerando o zero, instantes antes do ato de começar a contar. Nunca iniciamos esta ação no zero, e, sim, a partir dele, e é desse lugar que estamos falando, onde tem início a contagem. Que principia algo, mas não tem lugar para se fixar. É o princípio em nada.

Para Peirce, o quali-signo, o sin-signo e o legi-signo são, respectivamente,

"... uma qualidade que é um signo. Não pode, realmente, atuar como um signo, até que se corporifique; mas esta corporificação nada tem a ver com seu caráter como signo",

"... uma coisa ou evento existente e real que é um signo. E só o pode ser através de suas qualidades, de tal modo que envolve um quali-signo ou, melhor, vários quali-signos. Mas estes quali-signos são de um tipo particular e só constituem um signo quando realmente se corporificam" (Peirce 1977: 52) e

"... uma lei que é um signo [...] Todo signo convencional é um legi-signo. Não é um objeto singular, mas um tipo geral sobre o qual há uma concordância de que seja significante. Todo legi-signo significa através de um caso de sua aplicação, que pode ser denominado réplica do legi-signo". (CP 2.246).

O legi-signo, num exemplo matemático, seria a série infinita de números *um*, S={1,1,1,...,1,... }. Cada elemento *um* está bem definido como a unidade matemática que é uma quantidade determinada. No entanto, todos os numerais *uns* desta série, ao menos da posição que ocupam nela, são os mesmos numerais, portanto, o mesmo legi-signo; e cada uma das suas ocorrências é uma réplica. E, como afirma Peirce, a réplica em si é sin-signo porque é um existente concreto, e cada numeral um da série ocupa uma posição particular dentro dela. Porém, estes sin-signos são ocorrências singulares que são legi-signo, por sua vez são as réplicas.

Novamente, diante das três categorias universais, na relação do signo com seu objeto, ele pode ser ícone, índice e símbolo, respectivamente associados à primeiridade, segundidade e terceiridade. Peirce considerava esta tricotomia como a mais importante delas na teoria dos signos (CP 2.275). Ele entendia esta tricotomia do seguinte modo:

> *“Um ícone é um signo que se refere ao objeto que denota apenas em virtude de seus caracteres próprios, caracteres que ele igualmente possui quer um tal objeto realmente exista ou não. É certo que, a menos que exista um tal objeto, o ícone não atua como signo, o que nada tem a ver com seu caráter como signo. Qualquer coisa, seja uma qualidade, um existente individual, ou uma lei, é um ícone de qualquer coisa, na medida em que for semelhante a essa coisa e utilizado como um seu signo”;*
>
> *“Um índice é um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de ser realmente afetado Por esse objeto. Portanto, não pode ser um quali-signo, uma vez que as qualidades são o que são independentemente de qualquer coisa. Na medida em que o índice é afetado pelo objeto, tem ele necessariamente alguma qualidade em comum com o objeto”* e
>
> *“Um símbolo é um signo que se refere ao objeto que denota em virtude de uma lei, normalmente uma associação de idéias gerais que opera no sentido de fazer com que o símbolo seja interpretado como se referindo àquele objeto. Assim, é, em si mesmo, uma lei ou tipo geral, ou seja, um legi-signo”* (Peirce 1975: 52-3).

É lógico que se um signo aparece como simples qualidade, ele é um ícone. Esta qualidade apenas se dá à contemplação, ela nunca está em algo. Quando estamos a sentir algo não percebemos a sua existência. Um ícone é primeiridade, por isso, é uma possibilidade e, também, é um quase-signo. Ele não chega a ser signo porque nunca se torna um existente. No momento em que isto ocorre, ele já é segundidade.

Em relação ao objeto, a segundidade é índice, e nesta categoria a fisicalidade está presente entre signo e objeto e há um existente real. Isto é, existe algo físico ou material que está efetivamente no lugar do signo. São índices: o cata-vento, a fotografia, a fita métrica, nomes próprios, pronomes, artigos e preposição, porque estabelecem relações entre as palavras no texto, o dedo indicador, indicando a quantidade um, o desenho do círculo num papel, enfim tudo aquilo que estabelece uma relação diádica entre o fundamento e o objeto.

O símbolo cria uma relação entre o fundamento e seu objeto arbitrariamente definida. Enquanto a fotografia da casa, que é índice, remete-nos à casa propriamente dita, a palavra casa, que é símbolo de um objeto de moradia, não tem qualquer ligação visual ou física com aquilo a que ela se refere, a não ser o significado arbitrário construído por nós. As convenções sociais estabelecem estas relações impostas entre fundamento e objeto. Em lógica, por exemplo, as letras do alfabeto p e q representam proposições ou afirmações e são símbolos de sentenças, como por exemplo: todo o homem é mortal.

Finalmente, diante das três categorias universais, novamente, na relação do signo com seu interpretante, podemos dizer que ele é rema, dicente ou argumento, respectivamente associado à primeiridade, segundidade e terceiridade.

> *"Um rema é um signo que, para seu interpretante, é um signo de possibilidade qualitativa, ou seja, é entendido como representando esta e àquela espécie de objeto possível. Todo rema propiciará, talvez, alguma informação, mas não é interpretado nesse sentido"*

> *"Um signo dicente é um signo que, para seu interpretante, é um signo de existência real"*

> *"Um argumento é um signo que, para seu interpretante é signo de lei"*

Reafirmando as três categorias universais: primeiridade, segundidade e terceiridade como possibilidade, existente real e lei, que são encontradas no signo em relação ao interpretante,

> *"podemos dizer que um rema é um signo que é entendido como representando seu objeto apenas em seus caracteres; que um dicente é um signo que é entendido como representando seu objeto com respeito à existência real; e que um argumento é um signo que é entendido como representando seu objeto em seu caráter de signo"* (Peirce 1975: 53).

Finalizando, podemos elaborar o seguinte diagrama para melhor compreender o que construímos até agora. Considerando a relação do signo consigo mesmo (1^0), a relação do signo com seu objeto (2^0) e a relação do signo com seu interpretante (3^0), nós temos:

Tricotomias	**1^0**	**2^0**	**3^0**
Categorias	Signo em si mesmo	Signo com seu objeto	Signo com seu interpretante
1^0	Quali-signo	Ícone	Rema
2^0	Sin-signo	Índice	Dicente
3^0	Legi-signo	Símbolo	Argumento

Como cada signo é determinado pela relação entre representamen, objeto e interpretante, as permutações possíveis são 3X3X3 = 27 combinações possíveis. Algumas destas possibilidades são semioticamente inviáveis. Na medida em que um signo em si é qualidade, portanto, quali-signo, ele não pode ter uma mente interpretadora em terceiridade, pois ele não se realizou além da primeiridade enquanto signo. Este mesmo raciocínio vale para a parte objetual do signo. Então as possibilidades são 10, isto é, as dez classes de signos, que identificaremos pelos números que ocupam posições determinadas: 111, 211, 221, 222, 311, 321, 322, 331, 332 e 333, onde o primeiro número é a categoria do signo em si, o segundo é a categoria do objeto e o terceiro é a categoria do interpretante. Assim, exemplificando o elemento 321 é um legi-signo indicial remático.

3.3.1. Iconicidade dos signos – imagem, diagrama e metáfora

A teoria peirceana, além de ser fundamentada nas três categorias universais, também deve ser observada por níveis de complexidade, como já argumentamos. A cada novo passo que damos ou a cada nível de compreensão que adquirimos, encontramos outros níveis mais complexos que os anteriores, que também são organizados de forma triádica, num processo infinito de semioses. Por este motivo, após ter sido analisado o conceito de signo como uma relação totalmente determinada pela primeiridade, portanto quali-signo icônico remático em relação a cada constituinte do signo, podemos determinar o passo seguinte.

Antes disso, porém, vamos situar melhor em que nível de conhecimento do signo nós estamos. Ele é composto pela função entre o representamen, o objeto e seu interpretante. Em relação ao objeto o signo pode ser ícone, índice e símbolo e, na seqüência deste raciocínio, considerando a primeira das dez classes sígnicas, ele é quali-signo icônico remático, que segundo Peirce, é um signo que é ícone puro. Para ele, a iconicidade é um signo que possui os seus três constituintes em primeiridade, ou seja, o signo icônico é pura possibilidade. Sendo assim, podemos caminhar um pouco mais e definir outro nível de percepção com um grau de complexidade mais profundo. As novas classificações para a iconicidade são: imagem, diagrama e metáfora. Este terceiro nível é vital para o nosso trabalho, na medida em que estamos analisando *as imagens matemáticas* e, é neste nível que nossa percepção se fixa. Nosso objeto de estudo está sendo classificado com as mesmas características dos modos de classificação da iconicidade, isto é, aspectos imagéticos, lingüísticos e paradigmáticos. Como estaremos detalhando, há muita similaridade entre o que pretendemos formular e a iconicidade do signo em Peirce. Vejamos melhor estas definições nas palavras do próprio autor.

> *"Um signo por primeiridade é uma imagem de seu objeto e, em termos mais estritos só pode ser uma idéia, pois deve produzir uma idéia interpretante, e um objeto externo excita uma idéia através de uma reação sobre o cérebro. Contudo, em termos mais restritos ainda, mesmo uma idéia, exceto no sentido de uma possibilidade, ou primeiridade, não pode ser um ícone. Uma simples possibilidade é um ícone puramente por força de sua qualidade, e seu objeto só pode ser uma primeiridade. Mas, um signo pode ser icônico, isto é, pode representar seu objeto principalmente atra-*

vés de sua similaridade, não importa qual seja seu modo de ser. Se o que se quer é um substantivo, um representamen icônico pode ser denominado de hipoícone. ... [Assim, os hipoícones] podem ser divididos de acordo com o modo de primeiridade que participem. Os que participam das qualidades simples, ou primeira primeiridade, são imagens; os que representam as relações, principalmente as diádicas, ou as que são assim consideradas, das partes de uma coisa através de relações análogas em suas próprias partes, são diagramas; os que representam o caráter representativo de um representamen através da representação de um paralelismo com alguma outra coisa, são metáforas (Peirce 1977: 64)

De fato, uma idéia só pode ser expressa através de um ícone que é uma imagem. Ela é pura qualidade. É um sentimento que não aparece, apenas se apresenta. Porém, se não aparece, também não pode representar algo para um interpretante qualquer, e deste modo, não é signo. E, é por isto, que o ícone é considerado um quase-signo. As qualidades de nossos sentimentos são ícones. Quando sentimos algo muito intenso: amor, ódio, dor ou paixão, eles nos cegam. Nossa percepção é indivisível, não conseguimos notar nada além deste único sentimento. O *insight,* que é uma idéia, parece vir do nada, e, nos momentos de contemplação, ele surge num piscar de olhos. Assim, qualquer sentimento que é antes uma qualidade, tem o poder de estar no lugar de qualquer coisa que se assemelhe a ela. Quando observamos uma imagem abstrata produzida pelo computador, a qual não temos a mínima idéia do que se trata e como foi gerada, temos consciência do que ela representa e, por alguns segundos penetramos na imagem tal como um sonho, que observamos como um ícone.

Quando provamos um teorema matemático e chegamos a um raciocínio sintético, consistente e completo expresso através de uma demonstração, afirmamos que isto é um belo raciocínio dedutivo, pois, de fato, percebendo a qualidade da construção racional e a beleza do raciocínio humano, expressa em uma fórmula ou em um conceito. Assim, no mesmo exemplo, podemos identificar um hipoícone que é o sentimento de beleza, e, portanto, uma imagem, é um hipoícone que, por sua vez, é a formula ou a formulação em si, um diagrama.

Poderíamos afirmar que a segunda parte do exemplo trata-se de um signo convencional, assim em terceiridade. Ao contrário, estamos destacando na fórmula algébrica, assim com Peirce o fez, apenas as analogias entre o representamen e o seu objeto. Neste caso, o que devemos buscar são as verdades relativas que podem ser extraídas além das que estão explicitadas pela observação direta. Na

”sintaxe de toda a língua, existem ícones lógicos do tipo dos que são auxiliados por regras convencionais” (Peirce 1977: 65).

É por este fato, que o segundo modelo que vamos analisar, depois das formas das imagens matemáticas propriamente ditas, é como a linguagem matemática se estabelece, isto é, os aspectos referentes aos níveis lingüísticos do código. As características a serem observadas nos diagramas são as relações entre as partes que contém significado, e, mais do que isto, os elementos usados e sua possível relação de semelhança com os objetos que representam. Por exemplo, se tivermos uma seqüência de números representados pela expressão (a_1, a_2, a_3,..., a_n,...), então, a seqüência de letras *a,* que aparece na expressão, são semelhantes entre si com coeficientes diferentes, são consideradas ícones. Em função disto, todas as expressões algébricas são hipoícones que, por sua vez, são diagramas. Elas exibem, através de seus signos algébricos, as relações existentes entre as partes.

No terceiro caso, o hipoícone é metáfora. Ele mantém uma relação de paralelismo com algo que é outro, naquilo que está sendo representando. Ele se refere, em paralelo, a um segundo signo que é outro diante dele, e só o representa porque possui similaridade em algum aspecto com o primeiro. As metáforas são signos genuínos, que ao se referirem indiretamente ao objeto, transformam-se em ícones que possuem um grau de iconicidade menor. Elas representam o objeto, porque, paralelamente, possuem a mesma qualidade estrutural que o objeto representado. A metáfora é, por isso,

“uma relação triádica na forma de paralelismo entre dois elementos constitutivos, paralelismo que se resolve numa terceira relação” (Nöth 1995: 84).

Voltaremos a isto nos capítulos relativos às classes de signos que ora propomos, porém devemos destacar que estes conceitos, analisados de maneira esquemática, não são meras palavras com definições isoladas do contexto desta teoria, assim sendo, devem ser compreendidos muito mais pelas iconicidades que representam na estruturada filosofia peirceana do que como simples definições extraídas de um dicionário, por exemplo.

3.4. O diagrama das ciências

Os pensamentos de Peirce, dada a integridade e consistência de sua obra, praticamente são impossíveis de serem observados a partir de algum ponto tomado como inicial, sem que tenhamos que romper com a continuidade de sua doutrina. No entanto, no momento em que o fazemos, e conseguimos furar essa armadura em algum ponto, sentimo-nos igual a uma gota de chuva que cai no oceano e que, após penetrar na superfície da água violentamente, incorpora-se a ele, como se sempre dele tivesse sido parte.

Façamos então esta conexão com o pensamento de Peirce através de seu Diagrama Classificatório das Ciências que, segundo ele, é a porta de entrada para a compreensão de sua obra. (Santaella 1994: 111). De fato, seguindo este caminho, observaremos que este esquema classificatório não é apenas uma proposta de ordenação para todas as ciências, mas sim, um sistema axiomático semiótico (Nöth 1995: 63) que possui um caráter lógico-relacional e que se explicita imediatamente como um método de investigação, quando observamos a interconexões que há nesta rede. Suas partes se fazem e seu todo se faz parte, sem divisões, hierarquicamente constituído.

Ao observarmos esta trama que é o pensamento humano, percebemos que a classificação peirceana organiza as ciências das mais abstratas para as menos abstratas. Ela tem início na matemática que é uma ciência que possui o maior nível de abstração entre todas e, com isto, fornece seus princípios de constituição para este grandioso edifício teórico que é a realização peirceana. Como veremos, ao detalhar esta classificação, Peirce acreditava que a lógica, que é de mesma natureza que a matemática, é a arte de conceber métodos e, assim, considera que seu trabalho foi encontrar um *“método dos méto-*

dos" (CP 7.59) estabelecido pela lógica. Para ele, ainda, a matemática vem antes da lógica, na classificação das ciências, porque

> *"constrói seus objetos na forma de hipóteses e deles extrai conseqüências necessárias sem lidar contudo com as questões de fato"* (Ibri 1994: 3).

Ela é uma ciência condicional ou hipotética, cujo objetivo exclusivo não é descobrir como as coisas são neste instante, mas sim, como elas poderiam ser aqui ou em qualquer lugar. A matemática não pergunta nada sobre o mundo real, ela desenvolve-se, exclusivamente, dentro do pensamento humano e é sustentada pela razão. Em sua gênese, a matemática exclui qualquer relação possível com a experiência pura e simples e, assim, é considerada a ciência que estuda os estados hipotéticos das coisas, onde as conclusões são construídas e seus escritos são para desenvolver um ponto de vista basicamente mental, apenas ricas conclusões (Carolyn 1979: 239).

Depois da matemática, no diagrama peirceano, vem a *filosofia* que lida com as experiências cotidianas e está em busca do verdadeiro. Nas palavras do autor, ela é a ciência que

> *"lida com verdades positivas, pois, de fato, satisfaz-se com observações tais como as que são pertinentes à experiência normal e diária de todo homem, e nas mais das vezes, em toda hora consciente de sua vida"* (Peirce 1983: 15).

A partir desta experiência comum, a filosofia tem como princípio encontrar as categorias mais fundamentais da experiência humana. Ela busca os princípios necessários para o desenvolvimento das outras disciplinas filosóficas, e, assim, é considerada por Peirce, como uma quase ciência. A fenomenologia, que é a primeira das ciências filosóficas, estuda as categorias mais gerais do pensamento, e através dela foi que o criador da semiótica chegou aos conceitos de primeiridade, segundidade e terceiridade.

Mais a diante, no diagrama peirceano encontramos a última classe das ciências, a que possui o menor grau de abstração em relação às outras duas e são as c*iências apli-*

cadas. Peirce achou por bem denominá-las de c*iências especiais*, pois elas fundamentam-se em observações especiais, assim como: a física, a química, a fisiologia, a psicologia, etc... As ciências especiais são consideradas através das ciências físicas e psíquicas.

Efetivamente, neste trabalho, daremos atenção para a matemática que serve de modelo sistêmico para as demais formas de conhecimento do homem. E, como vimos, ela vai nos auxiliar nas questões relativas às formas de raciocinar do homem e as suas verdades. Este capítulo não pretende dar ênfase ao fato de encontrar às verdades, mas sim, em buscar um método que nos conduza as verdades nas ciências. Peirce, em seu pragmatismo, através das palavras de Max Fisch, afirma que sua doutrina filosófica é

> *"pelo menos em primeiro lugar, uma regra do método para a correta condução do raciocínio e a busca da verdade nas ciências"* (Fisch 1986: 294).

Comecemos então por detalhar cada uma das ciências. Lembrando sempre que elas, antes de serem segmentos isolados do conhecimento, são uma grande rede impregnada de lógica na qual se fundamenta o pensamento de Charles Sanders Peirce. O pragmatismo, que ele resolveu denominar de pragmaticismo pelo uso errôneo que faziam do primeiro termo, é uma doutrina filosófica que visa estabelecer um método para toda a forma de raciocínio, assim, não estamos preocupados em afirmar sobre os sentidos de todos signos, mas em determinar um método para observa-los e, conseqüentemente, um método que não é um princípio sublime da filosofia especulativa, mas, sim, uma mera máxima lógica (CP 5.18). Assim, nas palavras de Peirce,

> *"O que se deseja, então, é um método capaz de determinar o verdadeiro sentido de qualquer conceito, doutrina, proposição, palavra ou outro tipo de signo. O objeto de um signo é uma coisa; o sentido outra. O objeto é a coisa ou ocasião, mesmo indefinida, à qual o signo se há de aplicar; o sentido é a idéia que ele liga ao objeto, tanto por via de mera suposição, ou ordem, ou asserção... Cada idéia simples pertence a uma de três classes; e uma idéia composta é, na maior parte das vezes, predominantemente duma dessas classes. Pode ser qualidade-de-sensação, (...) caso em que é indescritível; ligada a um objeto sem relação a nenhum outro;*

não podendo ser comparada enquanto qualidade positiva, sui generis, com outra impressão (sensação), porque se comparam representações das sensações e não as próprias sensações. Em segundo lugar, a idéia pode ser um simples acontecimento ou fato, que se liga de imediato a dois objetos, como experiência, na qual se liga ao experienciador e ao objeto experienciado. Em terceiro lugar, pode ser a idéia dum signo ou comunicação de uma pessoa e outra (ou da pessoa consigo mesma, num momento posterior), em relação a objeto conhecido de ambas" (Peirce 1983: 6).

Aqui, gostaríamos de ressaltar, a total conexão existente entre o pragmatismo, as categorias universais e a teoria dos signos peirceanos. Em resumo, o pensamento deste autor é como Maria Lúcia Santaella o descreveu quando realizou sua tese para obtenção do título de Livre Docência na Universidade de São Paulo. Para ela, a compreensão da concepção peirceana esta expressa na totalidade de suas reflexões, ou seja, é uma

"unidade harmônica sem arestas,... que, à maneira de um argumento ou de uma composição musical vão se integrando na constituição de um todo até o ponto de não sermos mais capazes de perceber qualquer separação entre as partes (Santaella 1993: 22).

Citamos este trecho do trabalho de Santaella, "Metodologia Semiótica - Fundamentos", porque entendemos que ele aborda profundamente as questões que estamos desenvolvendo neste capítulo e com muita preciosidade. Por outro lado, além de ser ele nossa referência e ela a nossa orientadora, gostaríamos de destacá-lo, assim como todo o trabalho de Santaella, como sendo um ponto de apoio para quem quiser aprofundar seus conhecimentos relativos ao pensamento de Peirce e princípios desenvolvidos por ele.

Voltemos então ao Diagrama das Ciências, retomando a matemática que é a primeira das ciências neste esquema e que, segundo Benjamin Peirce, pai de Charles Sanders Peirce, é um tipo de raciocínio que é bem compreendido por nós e consiste em formar uma imagem das condições do que queremos enfrentar. Ela está associada a certas premissas gerais que a modificam, e certas hipóteses que se tornam impossíveis diante de certas coisas. No entanto, podemos realizar experimentos sobre a imagem e as impossibilidades por hipóteses fazem com que sempre cheguemos aos mesmos resultados (Peirce 1983: 7).

Relativo a estas conclusões, sobre a matemática, e acrescentando contemporaneidade às formulações de Peirce, devemos deixar aqui, o registro do pensamento do matemático e lógico, Newton C. A. da Costa, que é considerado um dos criadores da lógica paraconsistente. Ele, apesar de não dedicar muito de seu tempo aos estudos dos pensamentos peirceanos, em muitos momentos apresenta-se próximo à teoria formulada por este filósofo americano. Costa concorda parcialmente com a concepção filosófica acerca da matemática de Benjamim Peirce e, completando o raciocínio de Charles Sanders Peirce, fundamentado pelos pensamentos a respeito da lógica e da verdade, temos que

> *"a matemática é a ciência na qual se derivam conclusões necessárias, módulo de uma certa lógica"* (Costa 1993: XIII).

Voltaremos a isto mais adiante, quando estivermos falando sobre as questões históricas e os paradigmas matemáticos. Agora, retomemos o raciocínio matemático de Peirce. Para ele, esta forma de reflexão é dialógica e diagramática. Isto deve ser entendido como um tipo de raciocínio que se constrói através do diálogo entre diagramas, de acordo com preceitos expressos em termos gerais. Sobre estes diagramas, podemos realizar experiências que, através da interação, portanto do diálogo, nos conduziriam, finalmente, a experimentação dos resultados.

Enquanto a matemática estuda o que é logicamente possível sem ser responsável pela existência atual desse possível, a filosofia tem por função descobrir o que é realmente verdadeiro, limitando-se, porém, à verdade que pode ser inferida da experiência comum e que está aberta a todo homem, a qualquer instante. Por fim, tudo isto, que é a expressão do seu método de investigação científica, está sustentado na observação que nos conduz às ciências positivas que determinam a filosofia. Para Peirce, ela é *“uma investigação que busca conhecimento positivo; conhecimento que pode ser expresso convenientemente através de uma proposição categórica (...) e que pode mostrar que, o que a forma como bom, o é”* (Peirce 1983: 15).

Em seu diagrama classificatório, a filosofia é constituída pela fenomenologia, ciências normativas e metafísicas. A primeira das ciências positivas é a fenomenologia ou a doutrina das categorias, que também não depende da lógica e de nenhuma outra ciência, a não ser da matemática pura. Segundo o criador da semiótica, para compreendê-la, devemos

“... simplesmente abrir nossos olhos mentais, olhar bem para o fenômeno e dizer quais são as características que nele nunca estão ausentes, seja este fenômeno algo que a experiência externa força sobre nossa atenção, ou seja, o mais selvagem dos sonhos ou a mais abstrata e geral das conclusões da ciência” (CP 5.50).

Ela não afirma nada categoricamente e tem como primeira função descrever e classificar as idéias das experiências cotidianas, não dando importância ao fato delas serem ou não válidas e verdadeiras. A fenomenologia,

“... por pretender a formação dos modos de ser de todas experiências ou categorias, parece não poder submeter-se a outro método de que não àquele constituído, fundamentalmente, pela coleta de elementos de incidência notável e pela posterior generalização de suas características. As três faculdades requeridas podem assim, ser resumidas como ver, atentar para e generalizar, despindo a observação de recursos especiais de cunho mediativo” (Ibri 1992: 6).

Através dela e dentro do universo das aparências, Peirce elabora um levantamento exaustivo dos modos de ser dos fenômenos e, assim, com seu método de investigação científica, chega às três categorias universais dos fenômenos: primeiridade, segundidade e terceiridade.

As outras ciências que fazem parte da filosofia são classificadas como ciências normativas. Elas são capazes de lidar com os fins, com as normas e os ideais que norteiam o sentimento, os hábitos, a conduta e o pensamento do homem. Antes de analisarmos a estética, a ética e a lógica, cabe aqui, identificar um pouco melhor o que vem a ser esses fins.

> *"Toda a ação supõe fins, mas os fins, sendo gerais, estão no modo de ser do pensamento-signo que não está simplesmente na consciência, mas permeia todos os fenômenos. Qualquer outra coisa que qualquer coisa possa ser, ela também é um signo: esse era o mote peirceano. O universo inteiro está impregnado de signos. O seu novo entendimento do pragmatismo o levou a considerar que seu aspecto mais relevante está no fato de que o pragmatismo busca os fins. Esse fim, ou aquilo que é o bem humano supremo, consiste num processo de evolução no qual os existentes crescentemente vão dando corpo aos ideais que são reconhecidos como razoáveis"* (Santaella 1994: 118).

Agora estamos aptos a identificar o processo evolutivo, no qual ocorre o conhecimento e que tem os olhos voltados para o futuro, num eterno navegar em busca de uma classe de ideais. Os fins estão colocados em um ponto à nossa frente, num futuro desejável, mas nunca atingível. E, assim, o pragmatismo trata dos existentes que determinam uma classe de gerais que, por sua vez, de maneira evolutiva e a partir de seus desenvolvimento, mostram-se razoáveis, pois se sustentam na razão humana. Aquela racionalidade que se manifesta diante de nossos sentimentos, hábitos e de nossas ações.

> *"Peirce nunca recuou em sua sólida crença de que há uma verdade a ser reconhecida e que nós mesmos somos participantes do desenvolvimento da Razão, que está sempre em estado de insipiência e crescimento. Somos participantes da criação do universo (...) A única coisa que é desejável sem razão para ser, é apresentar idéias e coisas razoáveis"* (Bernstein 1990: 203).

E, para agir de maneira a apresentar idéias e coisas razoáveis, somos levados obrigatoriamente ao raciocínio, pois, as ações do homem ocorrem apoiadas na razão que, por sua vez, é deliberada e controlada pela nossa conduta objetivando um fim último, um ideal supremo da vida humana. E, para melhor compreender este raciocínio sobre os fins últimos e a busca da razoabilidade das coisas, voltemos às ciências normativas, pois elas devem ser compreendidas na medida em que estão voltadas para estes fins, sobre os quais podemos agir e eles sobre nós.

As ciências normativas regem os nossos sentimentos, hábitos e pensamentos. Elas são classificadas em ciência estética, ética e lógica e, esta última, na medida em que está diretamente associada à matemática, é de mesma natureza que esta, e do mesmo modo que a matemática, ajuda a analisar as formas de organização do pensamento humano. As três ciências normativas observam os fenômenos na medida em que eles podem agir sobre os fatos e, conseqüentemente sobre nós quando buscamos as possíveis generalizações e sínteses do pensamento. Para Santaella,

> *"A ação humana é ação raciocinada que, por sua vez, é deliberada e controlada. Mas toda a ação deliberada e controlada é guiada por fins, objetivos, os quais, por seu lado, devem ser escolhidos. Essa escolha também, se for fruto da razão, ser deliberada e controlada, o que, ao fim e ao cabo, requer o reconhecimento de algo que é admirável em si mesmo para ser almejado. A lógica como o estudo do raciocínio correto é a ciência dos meios para agir razoavelmente. A ética ajuda e guia a lógica através da análise dos fins aos quais esses meios devem ser dirigidos. Finalmente, a estética guia a ética ao definir qual é a natureza de um fim em si mesmo que seja admirável e desejável em quaisquer circunstâncias independentemente de qualquer outra consideração de qualquer espécie que seja. A ética e a lógica são, assim, especificações da estética. A ética propõe quais propósitos devemos razoavelmente escolher em várias circunstâncias, enquanto a lógica propõe quais meios estão disponíveis para perseguir esses fins"* (1994: 126).

As ciências normativas lidam com as leis que dão adequação às coisas e às finalidades, distinguindo o que deve ser esperado para essas leis do que não deve. A *estética*, em busca do ideal admirável, observa as coisas do mundo pelas aparências, o que é estético é aquilo que nos salta aos olhos; é aquilo que nos chama a atenção pela sua qualidade, livre de qualquer regra, tal qual um sentimento. Já a *ética*, pelo seu lado, observa a conduta e lê as coisas do mundo pela vertente daquilo que estamos deliberadamente preparados para compreender. Por fim, a *lógica*, como organizadora do pensamento humano, possui como fim a representação das coisas deste mundo, assim, está irremediavelmente associada à linguagem. Para Peirce, a *lógica* ou *semiótica* é a ciência que estuda todas as linguagens.

Segundo Peirce, nas ciências normativas, o pensamento através da linguagem produz ações baseadas na razão, portanto na ciência lógica. Por sua vez, esta é deliberada e controlada pelos nossos hábitos e condutas, isto é, pela ética. Mas, como uma ação é guiada por objetivos claramente escolhidos e havendo escolha a razão novamente está presente, o raciocínio, se levado às últimas conseqüências, nos faz perceber o fim último que buscamos, isto é, o ideal primeiro, o admirável em si, o estético por excelência. As ciências normativas estudam os fenômenos na medida em que eles podem agir sobre nós e nós sobre eles, num verdadeiro processo dialógico de segundidade. Elas estudam o que deve ser e de que maneira o sentimento, a conduta e o pensamento devem ser observados. A lógica tem que recorrer à ética para determinar a natureza de seu propósito, e, por seu lado, esta tem que descobrir o que estamos deliberadamente preparados para aceitar como aquilo que deve ser feito. E a estética, perguntando a natureza da sedução do ideal maior, é a primeiridade das ciências normativas e contém a alma, o coração e o espírito das ciências que adequam às coisas as suas finalidades.

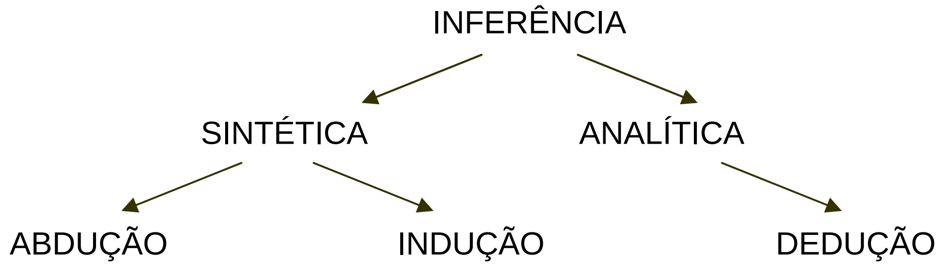
Todo o raciocínio possível necessita da linguagem para se constituir. A linguagem é constituída de signos. Não existe pensamento sem signo e, também, não existe signo sem pensamento. Assim, verificamos que toda a manifestação sígnica do pensamento na linguagem, seja ela qual for, atualiza-se através de interações mais ou menos equilibradas de vários tipos de signos e, de fato, o pensamento e as linguagens só podem existir e sobreviver na interação entre estes diversos signos que é onde se estabelece o processo de semiose dos signos. Em síntese, pensamento é signo e *“toda a forma lógica do pensamento é dada na percepção”* (Peirce 1983: 56).

A lógica possui características estruturais próprias que, como vimos, não se completam totalmente, pois estão fundadas na ética e na estética. Como ciência normativa que é, a lógica ocupa o coração de sua filosofia. Para ele, a semiótica ou a lógica, na visão de seu autor, em seu

> *“sentido mais estreito, é a ciência das condições necessárias para atingir a verdade. No sentido mais amplo, é a ciência das leis necessárias do pensamento, ou melhor (o pensamento sempre ocorre por meio de signos) é semiótica geral, que trata não apenas da verdade, mas também das condições gerais dos signos sendo signos... também das leis de evolução do pensamento, que coincide com o estudo das condições necessários para a transmissão de significado de uma mente a outra, e de um estado mental a outro”* (CP 1.444).

Comecemos então por defini-las. Para Peirce, as inferências são classificadas em sintéticas ou analíticas. As sintéticas são duas: *abdução* e *indução* e são aquelas que se apresentam como uma seqüência de conclusões, que tem início em novas idéias ou em premissas fracas e estão a caminho de serem validadas. Através da experimentação estas premissas vão se tornando fortes, a fim de se efetivarem como conclusões verdadeiras e serem generalizadas em leis. Quando conquistamos estas regras e leis estamos diante das inferências analíticas, que se confundem com a *dedução*. Esta última é um tipo de raciocínio lógico fundamentado em regras ou leis pré-determinadas, que são aceitas por nós como verdadeiras.

As duas primeiras inferências possuem características sintéticas porque estão à procura da descoberta e de como serão nossas generalizações e leis de modo a sintetizar conhecimento. Elas são inferências em processo e elaboram sínteses que se traduzem em pensamento e em conceitos, regras e leis brandas, as quais, ao fim deste processo, serão admitidas como verdadeiras e utilizadas para análise pela dedução. Vejamos então o esquema a seguir.



As duas primeiras inferências ou os raciocínios lógicos *abdutivo* e *indutivo* são de caráter *sintético.* Elas,

> *"diante de uma sucessão de conclusões concordantes ou diante de semelhanças de fatos ou entre casos, sintetizam os dados num pensamento íntegro e único"* (Laurentiz 1991: 48).

A inferência abdutiva é o raciocínio lógico que nos permite perceber as novas idéias; o *insight* propriamente dito. A abdução ou formulação de hipóteses diante de um conjunto de crenças, que são os nossos hábitos, detecta situações sobre as quais nossas percepções se abrem às novas conclusões dos fatos observáveis. A hipótese, suposição ou abdução nos faz compreender os fatos como mera sugestão de que algo pode ser.

A lógica abdutiva é o único tipo de inferência que transforma o infinito universo de possibilidades em um signo finito através do ato criativo. É o que tem qualidade de raciocínio e onde temos idéias. Ela abre caminhos e estabelece os novos conceitos sem compromisso algum com a validade da observação. Os valores desses conceitos serão estabelecidos pelo processo operatório ao qual submetemos os fatos em indução.

> *“A abdução começa a partir de premissas fracas que, após passarem pelo aval experimental da indução, tornam-se fortes e, portanto, abalizadoras de outros pensamentos”* (Laurentiz 1991: 48).

Então surge a segunda inferência sintética que é a *indução*. Ela observa o fato e adota uma conclusão que se aproxima da conclusão última e tem como finalidade nos encaminhar para a generalização do fato e ao estabelecimento de uma lei. No raciocínio indutivo, Peirce destaca que, o processo de investigação experimental que submetemos o fenômeno natural e cultural

> *"consiste em partir de uma teoria, deduzir predições dos fenômenos e observá-los para ver o grau de concordância com a teoria, a inferência indutiva nos mostra que algo atualmente é operatório"* (Peirce 1983: 46).

Já a *inferência analítica* se confunde com a *dedução* porque é do mesmo tipo que ela. A dedução possui como principal fundamento a análise dos fatos do ponto de vista das regras pré-estabelecidas, por isso, é analítica e também é o fim último da investigação científica. Pela dedução, somos conduzidos a uma conclusão acertada a partir de premissas pré-estabelecidas como verdadeiras. A dedução parte de um estado de coisas hipotéticas definidas abstratamente por certas características e, assim, chega a um tipo de inferência que

> *"é válida se e somente se existe uma relação entre o estado de coisas suposto nas premissas e o da conclusão"* (Peirce 1983: 44).

A dedução é o raciocínio lógico que prova que algo deve ser. Ela está fundamentada em regras e leis pré-determinadas e aceitas por nós como verdadeiras. O seu papel é analisar fatos a partir destas regras pré-determinadas.

Sob os olhos do raciocínio lógico abdutivo, nós abrimos nossas mentes aos fatos observáveis que, ao gerarem associações livres, sem ordem determinada ou pré-estabelecida, fazem-nos refletir sugerindo, mas nunca afirmando, num primeiro nível de consciência. É nesse momento que o pensamento se estabelece como uma primeira síntese, que parece vir do nada e traduzir-se em um novo conhecimento. Em seguida a dedução, que é uma inferência analítica, se estabelece e deverá ser intensamente testada pela indução. O raciocínio lógico indutivo, na operacionalização dos fatos percebidos em abdução e determinados pela dedução, é encaminhado à generalização e ao estabelecimento de uma regra, como hábito, que finalmente deverá ser cumprido logicamente pela dedução.

As inferências lógicas às quais submetemos o pensamento vão do acaso À determinação. O pensamento é um processo contínuo que parte de uma inferência branda em determinação e vai em busca de uma inferência precisamente determinada e, assim, a multiplicidade associa-se à lógica abdutiva e a unidade à lógica dedutiva, no mais, o restante é o método de investigação científica que está agindo, numa lógica indutiva. Quando observamos algum fato, então, uma hipótese explicativa se torna necessária e,

> *"a explicação deve ser uma proposição tal que levaria à predição dos fatos observados, quer como conseqüências necessárias, quer, pelo menos, como muito prováveis sob certas circunstâncias. Uma hipótese, então, tem de ser adotada como plausível nela mesma e tornando os fatos plausíveis. Este passo de se adotar uma hipótese como sugerida pelos fatos, é o que chamo de abdução"* (CP 7.202).

O primeiro passo da investigação é a hipótese a ser adotada, a segunda coisa a ser feita

> *"... é traçar suas conseqüências experimentais necessárias e prováveis. Esse passo é a dedução"* (CP 7.203).

Após estas duas etapas que nos remetem em direção a uma verdade determinada, introduzida pela lógica da descoberta e aceita como uma verdade subseqüente à conclusão, somos levados a

> *"... esta espécie de inferência, de experimentos, testando predições baseadas numa hipótese, a única que está habilitada a ser chamada de indução"* (CP 7.206).

Resumindo, podemos dizer que o conhecimento de algo se inicia pela abdução, a partir de premissas fracas que, após passarem pelo aval experimental da indução, tornam-se fortes e, portanto, orientadoras de outros pensamentos. Assim, para a inferência dedutiva resta apenas o papel de analisar os fatos ou os casos a partir das premissas dadas, das regras pré-determinadas pelas outras duas inferências.

Adotando este processo de investigação experimental de Peirce como uma regra pré-estabelecida que determina o nosso pensamento, e seguindo o caminho da experimentação que nos conduz, mais uma vez, a testar a validade de nosso modelo dos signos matemáticos, verificamos que podemos observá-lo através da ótica da linguagem escrita como um sistema de signos que expõe a natureza de sua construção e, obviamente, tem similaridades com a linguagem escrita matemática.

Como um processo de codificação de segundo nível, porque é um sistema de signo visual que tem sua origem na linguagem oral; a escrita, em particular a escrita matemática, possui características próprias que pressupõem níveis maiores de sistematização, do que simplesmente o contato social em si e a fala das quais se origina. Estudá-la, neste momento, parece oportuno, já que nos falta esta visão das diferentes matizes que vamos encontrar na linguagem escrita segundo uma visão semiótica.

Nosso foco ao analisar as ciências do diagrama peirceano foi verificar como se organiza a matemática e o pensamento humano através das lógicas, em particular da lógica da descoberta. Para isso, caminhamos detalhando a classificação das ciências peirceanas, até o ponto que nos interessava e, assim, não devemos nos esquecer que cada ciência ou segmento de conhecimento, aqui especificado, faz parte de algo íntegro, coeso e hierarquicamente estruturado, inseridos em um pensamento que é uma rede de conexões.

Para melhor compreender a unidade estabelecida pelo pensamento peirceano observemos o seu Diagrama de Classificação das Ciências, agora definido até nosso interesse como ele se apresenta estruturado:

1. **Matemática**
2. **Filosofia**
   - **2.1. Fenomenologia**
     - **2.1.1. Primeiridade**
     - **2.1.2. Segundidade**

2.1.3. Terceiridade

2.2. Ciências Normativas

2.2.1. Estética

2.2.2. Ética

2.2.3. Lógica ou Semiótica

2.3. Metafísica

3. Ciências Especiais

3.1. Ciências Físicas

3.2. Ciências Psicológicas

Na análise do esquema peirceano nós deveríamos tratar da metafísica como um segmento da filosofia e, ainda, de todas as ciências especiais que compõem a estrutura elaborada por Peirce. Porém não é este o enfoque que queremos dar para estas fundamentações teóricas. Abordamos o diagrama do fundador da semiótica moderna com profundidade até a ciência normativa lógica, porque as outras ciências não possuem a mesma importância para o modelo que ora propomos. Peirce entende que a lógica, e mais especificamente a lógica da descoberta, é a essência de seu pragmatismo.

Dada a característica de corpo que encontramos ao estudar a filosofia peirceana, e para não deixar em aberto o esquema por ele elaborado, diremos apenas que a metafísica tem como finalidade investigar a realidade como terceiridade. Ao supor que há algo de natureza geral na exterioridade, no qual o pensamento se conforma, podemos dizer que a metafísica tem sua tarefa determinada quando traduz nossas hipóteses explicativas em experiências diretas, revelando o próprio caráter da individualidade. A fenomenologia estabelece as categorias da observação dos fatos pelas qualidades que comportam e, que, para Peirce, são sentimento, ação e reação e lei. Por sua vez, as ciências normativas estudam a mente, como ela deve responder às ações dos fenômenos quando os fins são deliberadamente buscados. E a metafísica é a mediadora entre as duas. Ela tem como objetivo admitir os traços gerais da realidade, uma vez que as características primordiais destes traços transformam-se em objetos possíveis do pensamento, através dos quais as questões particulares podem ser pensadas (Ibri 1992: 34).

Finalizando nossa análise, devemos comentar sobre as ciências especiais, que são as físicas e as psíquicas e lidam com os fenômenos particulares e suas especialidades. Na primeira estudamos a Física, a Astronomia, a Química, a Biologia, a Geologia, enfim, o universo material confinando-se aos fenômenos tal como eles ocorrem. A segunda, a ciência psíquica, trata dos processos e produtos das mentes finitas; são as ciências humanas e sociais como: a Psicologia, Psicanálise, Lingüística, História, Critica da Arte e Literatura, entre outras. As ciências físicas são as ciências das coisas como tal e as psíquicas são as das coisas governadas pelo intelecto (Santaella 1992a: 142).

3.5. Uma obra que é uma sinfonia e um teorema

Para Peirce, o homem é o próprio signo, cria e é criado por ele. Tudo que percebemos, fazemos e pensamos está permeado por signos, desde os sonhos, da intuição até uma sinfonia ou até a mais complexa das demonstrações abstratas. Evidentemente, estamos incluindo aqui todos os segmentos do conhecimento estabelecidos no Diagrama das Ciências: desde a matemática até as ciências físicas e psicológicas. A teoria peirceana unifica-se de forma profunda, através do processo de semiose e da cognição que se expressa na *"continuidade como vaguidade"* (Ochs 1993), a ponto de podermos admitir que tudo que está no universo é signo. A teoria de Peirce é pansemiótica, e em suas palavras:

> *"Todo o universo é penetrado por signos, se não se compõe até somente de signo"* (CP 5.448).

A continuidade faz parte de uma rede de semioses infinitas, os signos se entrelaçam formando o universo cognitivo e o próprio ecossistema em que vivemos. O mundo e seus fenômenos naturais, ou os culturalmente concebidos como criação humana, devem ser considerados como ecológicos sob uma perspectiva semiótica. De fato, onde existe lógica abdutiva, há conhecimento e onde ele está presente, os signos também estão. Para ele:

> *"o universo, como um argumento, é por força uma grande obra de arte, um grande poema – pois um belo argumento é sempre um poema, uma sinfonia – da mesma forma que o verdadeiro poema é sempre um argumento significativo"* (CP 5.119).

De acordo com o filósofo americano, podemos dizer que a teoria dos signos observa os ambientes internos e externos, nos quais os seres vivos estão presentes, a começar pelas plantas e a terminar por nós, os seres humanos. Estamos diante de um sistema harmônico e unicamente determinado; um belo teorema como teoria, enfim, uma obra de arte do conhecimento.

3.5.1. A teoria do *Umwelt* e da *Organização Autopoieses*

Para reafirmarmos as idéias peirceanas e mostrar a sua contemporaneidade, vamos considerar alguns autores que compartilham do pensamento dele. Jakob von Uexküll é um dos primeiros teóricos a tratar das relações entre os organismos vivos e o meio ambiente mostrando similaridades com a teoria semiótica. O mais importante de seus trabalhos foi a "*Theory of Meaning*", em 1940, que em 1982 foi analisada pelo seu filho, Thure von Uexküll, confirmando o pensamento do pai, numa publicação especial realizada pelo *"Journal of the Internacional Association for Semiotics Studies - Semiotica".* Este projeto de Jakob von Uexküll, como uma pesquisa empírica e teórica no campo da biologia, estabeleceu o conceito de *"Umwelt"* que, hoje, deve ser associado à cognição humana, dos animais e das plantas (Anderson *et. al.* 1984).

Para eles, todos os organismos vivos possuem um meio ambiente interno, seu *Umwelt* e, também, seu meio ambiente externo, seu *Innenwelt*. São duas formas específicas de representação da vida interna e externa de cada organismo. A estrutura fisiológica de cada animal nos dá pistas que nos faz reconstruir as experiências interna e externa destes seres vivos. E, assim, os animais que não respeitam este princípio não vivem na mesma realidade. Para Uexküll, o mundo das moscas *"é o mundo das coisas voantes"*, e o mundo do ouriço do mar *"é o mundo das coisas marinhas percebidas pelo ouriço do mar".* Em seu texto, Uexküll estabelece quatro tipos de *Umwelt* que podem ser abordados quando observamos o caule de uma planta silvestre florescendo e, assim, reconhecemos os seguintes ambientes:

- o *Umwelt* da menina que escolhe as flores para juntá-las em um ramalhete colorido que ela levará na cintura para enfeitar-se;
- o *Umwelt* de uma formiga que usa a regularidade da superfície do caule da planta como caminho ideal para alcançar sua área de comida, que são as pétalas das flores;
- o *Umwelt* de uma larva de cigarra que fura o caule para encontrar nas seivas da planta o material que usará para construir as paredes de sua casa e
- o *Umwelt* da vaca que come os caules e as flores para forrar seu estômago (Uexküll 1982: 29-30).

Em cada situação verificamos a construção de um tipo de *Umwelt* que é definido a partir do mesmo caule e da mesma planta. Ás vezes ele é ornamento, outras vezes um caminho, um ponto de extração, ou, finalmente, uma comida. Esta teoria trata da percepção dos seres vivos, e de como eles, subjetivamente, percebem o meio ambiente em que vivem, e, ainda, como determinam e são determinados pelo ambiente interno e externo intrinsecamente ligados ao seu processo de cognição.

O objeto do estudo de Uexküll não é a linguagem, mas sim a cognição dos seres vivos e suas relações e interações com suas próprias células, com as partes de seu organismo, com outros seres vivos, com aspectos familiares, grupais e de comunicação, determinando uma cognição que é fundamentada pela fisiologia de cada espécie, na etologia baseada nos conhecimentos de Lorentz e Tinbergen (Uexküll 1982: 1). Nesta teoria da significação o autor propõe um sistema que possui níveis semióticos de percepção e significação associados aos dois ambientes aos quais os seres vivos estão sujeitos. Ele considera que estamos diante de um sistema determinado pelo meio ambiente e pelos *"órgãos perceptivos" e "órgãos efetuantes"* de um *"receptor de significados"* que é qualquer organismo vivo. A este meio ambiente interno, que atua sobre cada sujeito, ele dá o nome de *Umwelt*, que não é um ambiente físico ou biológico objetivamente determinado, mas um ambiente subjetivo que é concebido a partir do campo perceptual do *"receptor de significados"*, que interage com ele num campo operacional e efetuante.

Num processo de mediação entre os diversos níveis de significado estabelecido para cada organismo vivo, igual ao processo de semiose peirceana, o *Umwelt,* como ambiente interno, é determinado e integra-se ao *Innenwelt,* o ambiente externo, que também é subjetivamente determinado. O *Umwelt* é uma rede de relações sígnicas que é, ao mesmo tempo, informacional e energética, espacial e temporal, e objetiva e subjetiva (Anderson *et. al.* 1984: 12). A teoria de Uexküll nasce vinculada a um modelo biológico e ao seu processo de semiose e, ainda, diante das possibilidades de interpretação, transforma-se em um sistema pansemiótico que observa níveis diferentes de cognição interagindo com o meio ambiente dos seres vivos.

O conceito de *Umwelt* foi tratado de maneira mais profunda em *"A semiotic perspective on the sciences: Steps toward a new paradigm",* de Anderson, Deely, Krampen, Ransdell, Sebeok e o filho de Uexküll (1984). Neste texto eles introduzem uma perspectiva que vai além da interdisciplinaridade de cada um dos seus autores e estabelece uma transdisciplinaridade para o conceito de *Umwelt*. E assim, associados aos pensamentos de Peirce e unificados através da semiótica, encontramos diversos autores relacionando esta teoria à quase todas as áreas do conhecimento humano; de modo transdisciplinar. Entre esses autores, podemos citar uma perspectiva *"biossemiótica"* como fundamentos de uma *"cybersemiótica"* (Brier 1998: 55-72; Viera 1998: 79-85), uma *"infosemiótica"* de (Marcus 1998: 73-78), ou ainda, ampliando mais este leque das disciplinas estudadas com respeito ao meio ambiente, encontramos em vários teóricos uma *"ecossemiótica"* (Nöth 1996: 261-281), que busca unificar a etologia, ecologia e evolução, numa fundamentação de origem peirceana. Hoje, existem vários campos de interpretação semiótica analisando as relações com o meio ambiente, através da *"ecossemiótica"*.

Dado o grande número de autores que abordam o tema, e até porque não é o escopo deste trabalho, vamos destacar apenas alguns textos e encaminhar inúmeros trabalhos e artigos, para quem queira refletir sobre o tema. Primeiramente Nöth, em seus livros *"A semiótica do século XX"* (1996: 265-281) e *"Handbook of Semiotics"* (1990), apresenta argumentos dedicados aos aspectos ecológicos e semióticos, portanto, ecossemióticos. Eles tratam de observar os teóricos que elaboram reflexões das ciências e de suas relações diante dos organismos vivos e do meio ambiente. E, assim como Peirce, que possui uma abordagem pansemiótica em sua teoria, Nöth cita diversos autores analisando seus pontos de vista relativos ao meio ambiente interno e externo dos seres vivos. E, apenas para exemplificar a grande quantidade de textos que tratam da ecossemiótica, vamos observa-los em Nöth:

> *“Originalmente um ramo da biologia, a ecologia, numa época de crises ecológicas mundiais, conhecidamente desenvolveu uma grande força de irradiação interdisciplinar. Assim, existe neste meio tempo uma filosofia ecológica (Sachsse, 1984, Schönherr, 1985), uma ecologia antropológica (cf. Eisenbart, ed. 1979, Hutterer et al., eds. 1985), uma ecologia da mente (Bateson, 1972), uma história natural filosófica do pensamento ecológico (Trepl, 1987; Mayer-Tasch, ed. 1991), uma eco-etologia (Krebs e Davies, eds. 1978), uma historiografia (Herrman, ed. 1986) e sociologia ecológica (Gärtner e Leisewitz, eds.1984), uma estética ecológica (Sturm, ed. 1979; Schörnherr, 1985: 133-45; Böhme, 1992; Krampen, 1993), uma e-copsicologia (Mogel, 1984) ou uma psicologia do meio ambiente (Mehrabian, 1976), uma teoria cognitiva ecológica (Gibson, 1979) e uma ecolingüistica (ver p.276)”* (Nöth 1996: 266).

Além desta lista de autores apresentada por Nöth, vamos acrescentar mais dois, e analisá-los mais em detalhe. Soren Brier e Jorge Albuquerque Viera estabelecem uma relação direta com o raciocínio que formulamos neste trabalho. Primeiro consideremos o argumento de Brier, que quando aborda o tema *“cybersemiotic”*, associa-o aos conceitos de *Umwelt* e de *”Organização Autopoieses”* de Maturana e Varela. Brier apresenta em suas idéias não-cartesianas, fundada em Peirce, a unificação das estruturas da teoria da comunicação e da informação. Ele configura suas reflexões a partir de duas perspectivas: uma centrada nas formulações de Lorenz e Tinbergen, que encaminham uma verdade não-mecânica e bio-psicológica, estruturada pela ciência da cognição, e outra no interesse peirceano concretizado-se na unificação das reflexões da ciência da informação e da comunicação. Segundo Brier, referindo-se à teoria da cognição e baseado nos pensamentos de Peirce:

"as diferenças se tornam informações quando um intérprete as vê como signos. [Para Brier,] não é muito claro se o conceito cibernético das diferenças se refere à primeiridade ou segundidade. A potencialidade é primeiridade, mas as diferenças entre os sistemas e os ambientes são segundidade. De qualquer modo, o que é capturado por uma mente é percebido como algo com significado. E isto somente pode ser feito na terceiridade" (1998: 68).

O pensamento de Peirce, em sua integridade, mostra que o conhecimento se apresenta como possibilidades em primeiridade, já, em segundidade, mesmo sendo observado pela perspectiva *"cybersemiotic"* da teoria da cognição, é construído diante de vários processos de interpretação do signo, isto é, através das semioses, para finalmente, se estabelecer como uma regra de lei em terceiridade. Brier, associando uma perspectiva etológica a uma semiótica, na biologia, ou na *"biosemiotics",* como ele a denominou, diz que ela vai nos conduzir a uma visão cibernética de segunda ordem, centrada na semântica cognitiva e na lingüística pragmática. A chave para a compreensão da cognição e da comunicação entre os animais e os seres humanos é, para ele, a noção de *Umwelts* que se auto-organizam em estruturas *Autopoieses*.

Este conceito de auto-organização é encontrado em Maturana e Varela (1997), e trata dos signos e significados que são estabelecidos a partir dos hábitos em nossas mentes e corpos, e estão associados ao nosso *Umwelt*, que através das estruturas internas organiza-se em *sistemas autopoiéticos.* Para eles, uma *organização autopoiética*,

"constitui um domínio fechado de relações especificadas somente com respeito à organização autopoiética que elas compõem, determinando desta maneira um espaço no qual tal organização pode materializar-se como sistema concreto, espaço cujas dimensões são as relações de produção dos componentes que o constitui em: i) Relações constitutivas, que determinam que os componentes produzidos constituam a topologia em que se materializa a autopoise. ii) Relações de especificação, que determinam que os componentes produzidos sejam justamente aqueles componentes definidos por sua participação na autopoise. iii) Relações de or-

dem, que determinam que a concatenação dos componentes em suas relações de especificidade, constitutivas e de ordem sejam as especificadas pela autopoise" (Maturana & Varela 1997: 81-82).

A *"biossemiótica"* está conecta com o conhecimento na etologia, na semântica cognitiva e nas novas combinações de experiências biológicas e culturais no processo de significação e comunicação. Para Brier, estes princípios estão profundamente desenvolvidos na filosofia triádica de Peirce e na sua evolucionária semiótica (1998: 64). Para ele, se unirmos os princípios desenvolvidos pela teoria cibernética e pela etologia através da semiótica peirceana e sua transdisciplinaridade, vamos encontrar uma teoria *"cibersemiótica"* que é verdadeiramente transdisciplinar. Estas fundamentações *"cibersemióticas"* para a informação, a cognição e as ciências da comunicação são bem conceituadas numa dinâmica de antecipação de toda a cognição que a informação processa como paradigma. Há um elemento de antecipação ativo em toda estas percepções e reconhecimento. Percepção e cognição fazem parte de um processo ativo conectado à dinâmica auto-organizada dos sistemas vivos e de sua habilidade especial para tratar com os indivíduos. (Brier 1998: 66). Para este autor, as reflexões peirceanas se relacionam às interpretações sobre uma definição cibernética e apontam para as questões relativas ao meio ambiente na cultura, na história e na sua eterna busca da verdade e do conhecimento. De acordo com ele, estes hábitos e fatos históricos delineiam o que somos: construtores sociais de significados, admitindo similaridades com o pensamento de Maturana e Varela (1997).

Vieira, em seu texto *"cybersemiotics: a systemic vision",* ao comentar o trabalho de Brier, também se apóia no conceito de *Umwelt* e de *organização autopoiética.* Ao completar seu raciocínio, ele afirma que estes sistemas se transformam em *sistemas abertos,* no sentido da termodinâmica. Isto é, Viera diz que os sistemas são abertos quando admitem a transferência em termos de transporte de energia e de informação, contrário aos fechados que na ciência física são caracterizados pelo isolamento em termos de transporte de matéria. E assim, podemos dizer como Viera, que para completar a relação existente entre *Umwelt* e *Autopoieses*, é necessário destacar três pontos importantes:

> *“1. A construção de uma organização autopoiética é, no processo de evolução, um exemplo de auto-organização e tem bases físicas associadas à materialidade neural;*
> *2. Esta organização define, nesta construção, a condição de antecipação mencionada por Brier, representando uma transferência funcional do sistema cognitivo; a percepção talvez seja o mais básico dos mecanismos da cognição e isto somente possibilita, através de acoplamento estrutural, admitir um estado “em avanço”, i. e., designado através da evolução.*
> *3. Conectando o sistema neural orgânico com o ambiente externo, existe uma interface estendida entre eles, um Umwelt determinado de cada espécie. Estes, nas partes mais internas, dirigem-se a uma forma transformadora intersemiótica e, na parte mais externa, acopla o sistema cognitivo ao ambiente físico através de ambientes sensíveis por regras através de leis físicas”* (Viera 1998: 82).

Resumidamente, e para finalizar este capítulo teórico em que abordamos vários autores e seus aspectos de similaridade com as idéias de Peirce, podemos dizer que as novas tecnologias e as produções associadas a elas, em particular as *imagens matemáticas*, são sistemas estruturados que ampliam nossas percepções internas e externas, associadas à subjetividade, através dos nossos *Umwelts* e da capacidade cognitiva e auto-organizada de nossos sistemas em elaborar conhecimento baseado em *organizações autopoiéticas*. E é em Ibri, com quem Viera (1994: 135-140) concorda, que a postura sistêmica do modelo peirceano nos conduz, e se revela, através da Cosmologia e no final do processo de evolução do universo, que é aquilo que se concretiza em terceiridade diante da doutrina da continuidade. Em seu idealismo objetivo, Peirce acreditava que na substância de sua cosmologia:

> *“a dissolução das fronteiras entre interioridade e exterioridade, prenunciada na Fenomenologia, fundada no Idealismo Objetivo e radicalmente assumida na Cosmogêneses, traz inevitavelmente, a idéia de crescimento por um espelhamento do (no) pensamento no (do) mundo”* (Ibri 1992: 124)

Aqui, a partir de todos os autores que observamos, unificados nas posições de Peirce, podemos considerar a primeira conclusão deste trabalho, que é a adoção de um método que é um sistema, o qual utilizaremos para analisar *"as imagens matemáticas".* O universo é semiótico e não há como dissocia-lo da inteligência. Estamos a considerar, assim como Peirce o fez, que a semiose não é um processo exclusivo dos seres vivos, mas extensivo a todas as instâncias de inteligência do universo. E assim, terminamos este capítulo com Peirce, no trabalho de Ibri (1992: 62).

> *"Em obediência ao princípio ou a máxima de continuidade, segundo o qual devemos imaginar as coisas contínuas na medida em que o possamos, realce-se que devemos supor uma continuidade entre os caracteres da mente e da matéria, tal que a matéria nada seria senão mente que teve seus hábitos cristalizados, fazendo-a agir com um alto e peculiar grau de regularidade mecânica ou rotina"* (CP 6.277).

4. POR UMA SEMIÓTICA DA IMAGEM MATEMÁTICA

Nas diversas áreas do conhecimento, nossos valores e crenças nos fazem perceber que todas as criações, ações e pensamento humanos, de um determinado momento histórico, são concebidos no sentido de se encontrar sínteses lógicas e relações entre as multiplicidades de sistemas estruturados. Sempre estamos em busca das verdades e dos modelos que se mostrem integralmente determinados. O homem está à procura de leis e verdades universais que permitam estabelecer generalizações e compreender os fatos do mundo que o cerca.

Peirce, centrado na integridade dos seus conceitos, produziu uma sólida arquitetura filosófica, que, como já constatamos, está fundada em uma lógica ternária estruturada em princípios básicos de percepção: *primeiridade, segundidade* e *terceiridade*. Em verdade, apesar de serem três os fundamentos que regem esta teoria, toda sua obra é um sistema harmônico, integralmente concebido e contínuo nas relações que geram, através do método de investigação científica e de sua consistente teoria dos signos.

A matemática pode ser observada por seus aspectos sígnicos que se materializam em imagens, gráficos, fórmulas, axiomas, lemas, teoremas e raciocínios, todos referentes aos objetos matemáticos que se organizam segundo uma estrutura, fundamentalmente dialógica e diagramática. Nos capítulos quatro, cinco e seis, estaremos refletindo sobre estas formas sígnicas, que se definem nas imagens pelo aspecto sintático, na escrita pelos aspectos semânticos e nos paradigmas produzidos por esta ciência.

Começaremos nossas análises pelas representações imagéticas. Isto é, vamos iniciar observando o signo matemático como imagem. Vamos examinar as *imagens matemáticas* propriamente ditas. Para isto, destacaremos as características predominantes desta ciência, recuperando o que foi dito por Peirce sobre as relações existentes entre as formas e as expressões produzidas por elas. Em um trecho da *"Consciência da Razão"*, publicado em *"The New Elements of Mathematics"*, o autor afirma que,

> *“as expressões abstratas e as imagens são relativas ao tratamento matemático. Não há nenhum outro objeto que elas possam representar. As imagens são criações da inteligência humana conforme algum propósito, e um propósito geral só pode ser pensado como abstrato ou em cláusulas gerais. E assim, de algum modo, as imagens representam, ou traduzem, uma linguagem abstrata, enquanto, as expressões são representações destas formas. A maioria dos matemáticos considera que suas questões são relativas aos assuntos fora da experiência humana. Eles reconhecem os signos matemáticos como sendo relacionados com o mundo do imaginário, assim, naturalmente fora do universo experimental. (...) Toda a imagem é considerada como sendo a respeito de algo, não como uma definição de um objeto individual deste universo, mas apenas um objeto individual, deste modo, verdadeiramente, qualquer um é de uma classe ou de outra”* (NEM 4: 213).

Neste trecho, Peirce deu ênfase aos aspectos formais, sintáticos e mentais das representações matemáticas, cujo enfoque está nas relações internas entre os diversos elementos que estruturam este tipo de signo, isto é, na composição, na forma, na medida, na estrutura e na inter-relação entre os aspectos visuais e mentais, sobre os quais o discurso matemático opera. Aprofundando um pouco mais estes elementos, notamos que a matemática tem uma abordagem semiótica altamente complexa e é uma ciência que trata, antes de tudo, da lógica de elaboração do conhecimento humano como ele é, sem estar questionando de onde ele vem. Deste modo, ela é uma ciência que, por princípio, nada tem a ver com qualquer fato real, a não ser com aqueles que extrai de dentro de si própria.

> *"É verdade que as idéias, elas mesmas, podem ser sugeridas por circunstâncias muito especiais; mas a matemática não se importa com isso. Ela é, assim, como a contemplação de um objeto belo, exceto que o poeta o contempla sem fazer perguntas, enquanto o matemático pergunta quais são as relações das partes, de suas idéias, uma com as outras"* (Santaella 1993: 158).

É claro que a principal atividade da matemática é descobrir as relações entre os vários sistemas, sem identificar ao que eles se referem, a não ser os aspectos criados pela própria linguagem em si. Para isto, os estudiosos sempre estiveram preocupados com todos os tipos de representações que a matemática formula, em particular, com aquelas que nos ajudam a construí-la enquanto ciência. Desta forma, vamos analisar os estímulos visuais e mentais que recebemos desta ciência, ou seja, vamos observar as *"imagens visuais"* e as *"imagens mentais"*, sintetizadas no que resolvemos denominar de *as imagens matemáticas.*

De acordo com Peirce, as imagens matemáticas são representações dos modelos que concebemos mentalmente, isto é, são signos visuais diagramáticos que exteriorizam o comportamento de nossas idéias abstratas, ou pelo menos são raciocínios da mesma natureza. Como já destacamos no capítulo anterior, este tipo de signo é um ícone e expõe suas características referentes aos objetos em primeiridade, começando por compreender a imagem propriamente dita, passando pelos diagramas, até chegar nas metáforas que estão associadas aos vários modelos paradigmáticos estabelecidos para esta ciência.

Apesar de estarmos realizando comentários sobre as relações entre as imagens visuais e mentais, sabemos da complexidade desse tema. Entendemos que a relação entre a visualidade e a mentalidade não é tão trivial, como possa parecer. Se afirmarmos que a partir de uma imagem mental geramos uma imagem visual, devemos dizer que o processo de elaboração de conhecimento começa em abdução ao nível da quase consciência, quando temos uma idéia, ou melhor dizendo, um insight. As diferenças entre estes dois tipos de signos se resolvem no interior do método de investigação científica e na relação sígnica, onde um representamen se faz signo em primeiridade e se relaciona com um objeto real ou mental expondo a sua segundidade. Já a mente interpretadora, através dos processos lógicos abdutivo, dedutivo e indutivo, transforma estes signos em signos mais evoluídos e, assim, não há separação entre a percepção e o pensamento. E todo o raciocínio é um signo e todo conhecimento se faz através da percepção concretizando-se na ação deliberada, num processo contínuo de transformação do conhecimento.

> *"A noção de diagrama em Peirce, também chamado de ícone diagramático, é de importância fundamental no raciocínio e linguagem matemáticos e lógicos: 'O raciocínio deve estar especialmente relacionado com as formas que são os principais objetos do insight racional. Por isso mesmo, ícones são particularmente requisitados para o raciocínio' (CP 4.331). Além disto, os diagramas estão presentes em qualquer tipo de pensamento, até o ponto de podermos afirmar, a partir de Peirce, que todo pensamento é essencialmente diagramático. Sem ícones, seria impossível captar as formas da 'síntese dos elementos dos pensamentos' (CP 4.544). São os ícones diagramáticos que constituem também o que se costuma chamar de padrões sintáticos, tanto na linguagem verbal quanto na musical e mesmo na visual, especialmente na arquitetura"* (Nöth & Santaella 1998: 66).

Nossa intenção é analisar as possíveis similaridades existentes entre as diversas formas de comunicação e de significação matemáticas do homem, na medida em que geramos imagens, de maneira geral, e matemáticas, em particular. Elas carregam muito da lógica destes processos gerativos, assim como, também, estão intrinsecamente ligadas aos modelos que as suportam. Neste capítulo estaremos observando o eixo sintático pelo qual se consolida a linguagem matemática e suas características dadas pela visualidade. Os meios eletro-eletrônicos de produção apresentam grande parte do seu potencial expressivo nas imagens visuais que traduzem a lógica matemática de suas linguagens de programação, isto é, a partir deste momento, estaremos refletindo sobre as *imagens matemáticas* propriamente ditas e seus diagramas. Estaremos observando os ícones diagramáticos que como

> *"um signo por primeiridade é uma imagem de seu objeto e, em termos mais restritos, só pode ser uma idéia, pois deve produzir uma idéia inter-*

> *pretante, e um objeto externo excita uma idéia através de uma relação sobre o cérebro. Contudo, em termos mais estritos ainda, mesmo uma idéia, exceto no sentido de uma possibilidade, é um ícone puramente por força de sua qualidade, e seu objeto só pode ser uma primeiridade. Mas, um signo pode ser icônico, isto é, pode representar seu objeto principalmente através de sua similaridade, não importa qual seja seu modo de ser”* (Peirce 1977: 64).

As imagens mentais por similaridade unem-se às imagens visuais e dado o caráter fortemente abstrato das *imagens matemáticas* elas são como ícones puros, da mesma forma como Peirce se referiu a uma pintura. Ao observarmos uma pintura,

> *“perdemos a consciência que ela não é a própria coisa, a distinção entre o real e a própria cópia desaparece e há um momento que a pintura é puro sonho... não é uma existência em particular, e no entanto ela não é geral”* (CP 3.362).

É exatamente esta sensação que temos ao penetrar numa imagem produzida por um computador ou uma imagem reproduzida no papel que, no nosso caso, em geral é abstrata e diagramática, pois é gerada por uma linguagem qualquer de programação e não tem o real como referência. Porém, este potencial programático não está presente apenas nas imagens produzidas no período eletro-eletrônico, no qual se fundamentam nossas análises. Para Wilton Azevedo, em sua tese de doutorado, as pinturas tradicionais, através de suas cânones e normas, já continham potencialidades programáticas (1994). Ele identifica estas características nas obras de Giotto, El Grego, Goya e Turner. Para ele,

> *“Os cânones são portadores de índices do mundo real, que também poderíamos chamar de simulação, um tipo de simulação que compreende gradações diversas, que podem ir da mais convincente imitação, até a criação de novos significados sem um referente objetual. Isto faz da pintura um veículo que obtém imagens através de modelos analógicos, neces-*

sitando sempre de um referente exterior, e quando não o faz, se desfaz, degenerando o seu suporte-obra em performances" (Azevedo 1994: 133).

Este comentário, bem como a nossa dissertação de mestrado (Hildebrand 1994), mostram que, há muito tempo, as imagens estão sendo associadas aos modelos e cânones matemáticas, ajudando o homem a raciocinar e representar o mundo ao seu redor. Os pontos, as linhas e as superfícies sempre foram representações de informações visuais fixadas nas pedras das cavernas, nas paredes das catedrais, nas telas de pintura, nos papéis dos livros, das fotografias e dos cartazes e nas telas de cinema e televisão, enfim, todos os suportes que mostram as formas bidimensionais e tridimensionais criadas por nós.

Hoje, acrescentamos novas formas de visualizar as imagens em nosso repertório de percepção. Temos as novas mídias eletrônicas que virtualmente, através dos monitores de vídeo dos computadores, nos auxiliam a representar objetos do mundo. Elas nos mostram todos os ângulos de visão, registrando o passado, fixando o presente e prevendo o futuro e, assim, estamos a dar significado aos fenômenos físicos e mentais que concebemos, através dos meios atuais de produção de linguagem.

4.1. A unidade das formas

As *imagens matemáticas* são modos de visualizar as fórmulas e os pensamentos idealizados por nós. Os signos matemáticos criados pelo homem são frutos de imagens que brotam em nossas mentes e, como tais, são modelos de objetos que não existem na realidade, e que somente são possíveis de ser observados, através de processos de modelagem. De fato, podemos dizer que estes tipos de representações adquirem vida e se materializam, atualmente, nas telas dos computadores, como *"imagens em processo".* Elas são concepções realizadas através de procedimentos altamente complexos de programação e visualização, que hoje, necessariamente, dependem dos meios eletro-eletrônicos para serem observadas.

Por alguns instantes, deixemos de olhar para as imagens e seus suportes e concentremos nossa atenção nos modelos que as geram. Eles, logicamente, determinam nossas formas de produzir, neste, e em qualquer ramo do conhecimento humano. Estes sistemas são princípios que se organizam a partir de certas premissas, com o propósito de estruturar alguma coisa ou algum ambiente. O modelo axiomático estabelece que a partir de um número fixo de proposições, que aceitamos sem provas, podemos derivar uma série de propriedades, lemas e teoremas e construir estruturas sistêmicas. Partindo de um número finito de premissas, que são axiomas, chegamos a um conjunto de conclusões que definem as relações internas entre os signos dos modelos da matemática.

Sabemos que, historicamente, a ciência da razão sempre utilizou argumentos e definições coerentes, axiomas e raciocínios lógicos que, de maneira consistente, efetuaram suas demonstrações. No entanto, hoje, podemos dizer que também a matemática está diante do que se faz incoerente, incognoscível e impenetrável, dando margem às dúvidas e às questões inconsistentes. Considerada como o último reduto do conhecimento que operava sob a ótica da precisão e da coerência, ela passou a estar diante do que pode ser indecifrável e paradoxal (Hofstandter 1984: 18).

John Horgan, no início de seu artigo *"A morte da prova"*, coloca em discussão os aspectos relativos à coerência e certeza sobre os fatos que sempre estiveram presentes na matemática. Para ele, a partir de Kurt Gödel, em 1952, esta ciência não é mais a mesma, e este não é mais um lugar das certezas absolutas. Ele acrescenta que as novas mídias eletrônicas estão expondo o pensamento matemático ao mundo das incertezas, ao afirmar que

> *"os computadores estão transformando o modo de pensar dos matemáticos, suas descobertas, suas provas e seu modo de comunicar idéias, ... "* (1993: 74).

Gödel, bem antes da virtualidade introduzida pelo mundo eletrônico, colocou fim à intenção dos matemáticos de construir um modelo no qual todos os ramos desta ciência poderiam ser dotados de um conjunto finito de axiomas, que permitissem desenvolver sistematicamente todas as proposições verdadeiras sobre aquele campo de conhecimento.

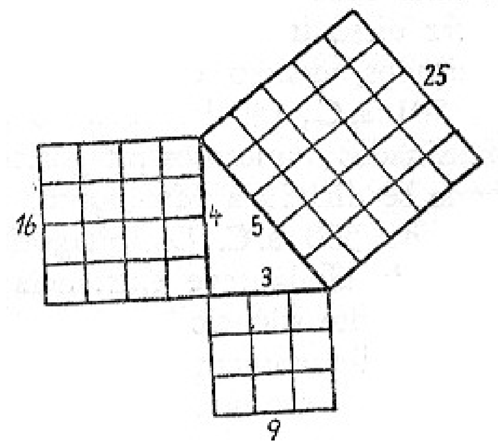
O autor, através do seu *"Teorema das Inconsistências",* provou não ser possível dar consistência lógica interna a uma grande classe de sistemas dedutivos (Nagel e Neumann, 1973: 65-85). Este fato marcou profundamente o discurso matemático deste final de século e merece atenção específica neste trabalho. Para isso, quando estivermos tratando da compreensão dos modelos lógicos matemáticos, o que acontecerá no próximo capítulo, aprofundaremos o assunto.

Depois desta breve referência à situação em que se encontram os modelos lógicos matemáticos, retomemos a análise que vínhamos realizando sobre o signo matemático e seu eixo sintático. Os objetos matemáticos são frutos da mente humana e, como tais, podem não existir enquanto fenômenos observáveis na natureza. São, de fato, *idéias* ou *imagens mentais* que necessitam de algum suporte para se concretizarem e, às vezes, se apresentam como simples qualidade. Peirce acreditava que os fatos observados pelo pensamento, e o próprio pensamento em si, são fenômenos de mesma natureza; são partes integrantes de um único e complexo sistema semiótico do qual o homem e suas linguagens fazem parte.

Assim sendo, em todos os campos da pesquisa matemática vamos encontrar os signos visuais dando suporte aos modelos que pretendemos representar. No texto "Proof without words", Roger B. Nelsen analisa este fenômeno de produção de conhecimento através das imagens e dos diagramas visuais, que nos auxiliam a efetuar demonstrações e provas em matemática. Nos exemplos dados por ele, há muito tempo utilizamos a visualidade para estimular as reflexões e auxiliar nas demonstrações matemáticas (Nelsen 1993: VI).

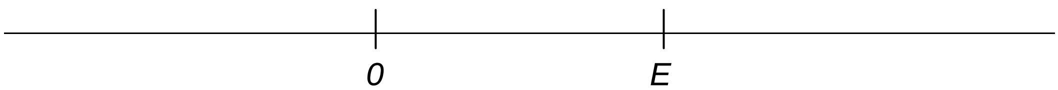
De fato, segundo o matemático Paul Halmos, nesta ciência a habilidade de visualizar figuras é fundamental e a maioria dos professores devem ensinar matemática aos seus alunos por esta habilidade. Ainda segundo Halmos, esta forma de raciocinar era muito utilizada por Albert Einstein e Henry Poincaré que diziam da importância de usarmos nossa intuição visual, para melhor conhecer as coisas do mundo.

Os processos de reflexão elaborados por desenhos, diagramas e representações visuais são antigos. Pitágoras, por volta do século X, demonstrou a consistência de seus modelos através de imagens, e o fez quando formulou seu famoso teorema sobre os triângulos retângulos. Este teorema afirma que a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado da hipotenusa. A propriedade fundamental dos triângulos retângulos pode ser verificada na figura ao lado. Neste caso particular verificamos que os catetos têm dimensões 3 e 4 e a hipotenusa é igual a 5. Os triângulos retângulos, se forem definidos pela geometria euclidiana, possuem um ângulo igual a 90° e, como verificamos claramente no esquema ao lado, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é exatamente igual à soma das áreas dos dois quadrados construídos a partir dos catetos.



Outro exemplo de utilização das imagens para visualização de modelos matemáticos é a associação de uma reta qualquer ao conjunto dos números reais. Paul Karlson, em seu livro *"A magia dos números",* faz esta associação e a elabora de maneira brilhante. Para ele, o processo de representação do conjunto dos números reais pode ser feito através de imagens e, para melhor exemplificar este desenvolvimento, ele afirma que devemos utilizar o modo de se elaborar fotografia. E, assim, vamos reproduzir na íntegra o texto de Karlson, dada a beleza e a riqueza de visualidade em sua observação.

> *"Propomos agora ao leitor uma questão um pouco mais difícil, pedindo-lhe anotar todos os números até aqui estudados, os inteiros e os fracionários, os positivos e negativos - mas todos, frisamos, sem deixar um único de lado. Traçamos simplesmente uma reta, aqui é mais fácil fazer que dizer, marcamos um ponto 0 - o ponto origem - e um segundo ponto E - o ponto unitário.*



> *Esta reta oferece a imagem fiel de todos os números que já conhecemos. Chegamos assim a um conceito de importância imensa, o conceito de imagem. Na realidade, a reta não se parece absolutamente com um nú-*

mero - não saberíamos, mesmo, que significado atribuir a esta afirmação. E, contudo, é realmente uma verdadeira imagem, embora de caráter simbólico" (Karlson 1961: 57).

A partir deste ponto o autor descreve detalhadamente o ato de se fazer fotografia. A luz ambiente penetra na lente do fotógrafo indo concentrar-se num ponto que dá origem ao enegrecimento da chapa fotográfica, a imagem gerada por esta ação cria uma inversão da realidade. Em seguida esta imagem será transportada para o papel fotográfico invertendo-se novamente, e assim é gerada a imagem no papel fotográfico. Ele continua dizendo que não importa a natureza do mecanismo conversor e que a imagem não é um registro fiel do que ocorre na realidade. De fato, ela depende das lentes das máquinas que fazem o registro. E aí, fazendo uma relação direta de similaridade entre a geração de imagem da máquina fotográfica e aquela realizada pelos modelos matemáticos, o autor afirma que a matemática

"... se encontra na feliz situação de possuir o mais perfeito mecanismo de transmissão que se possa imaginar, absolutamente isenta de erros: o conceito. Com ele, não só se dispõe de imagens simplesmente perfeitas mas se está, além disso, em condições de retratar e de por em relação, praticamente, todas as coisas" (Karlson 1961: 58).

Mais adiante, ele mostra que a reta que aparentemente é um objeto possível de ser realizado, não é tão concreto como poderíamos imaginar, e afirma que nós podemos projetar

"... um conjunto de conceitos inteiramente imateriais, os números que já conhecemos, sobre os pontos de uma reta, entidade que pende um pouco mais para o concreto, mesmo admitindo que, a rigor, a reta também nada mais é que criação do raciocínio; contudo, ela possui uma "figuração material", se assim quisermos dizer" (Karlson 1961: 57-58).

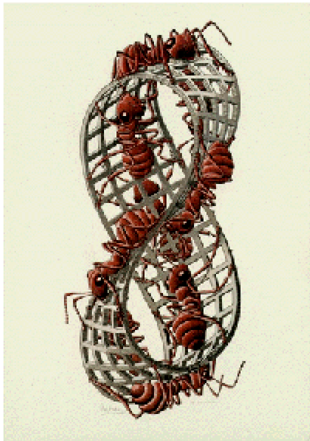
Hoje, o processo de geração de imagem através dos computadores coloca-nos diante deste mecanismo perfeito descrito por Karlson, na qual a qualidade de visualização dos modelos aproxima-se da descrição feita por ele. As novas mídias eletrônicas, com a capacidade que possuem de representar de maneira hiper-realística seus objetos, estão muito próximas das representações mentais matemáticas. Obviamente, estão longe de serem iguais a elas, porém, muito próximas de serem simulações do mundo real, observado por diferentes pontos de vista. Isto ocorre porque o processo de simulação tem a possibilidade de agregar um grande número de variáveis ao universo das linguagens computacionais e, assim, cada vez mais, realmente simulamos os ambientes que desejamos. A simulação é um aspecto importante na observação das unidades das formas matemáticas.

O processo de criação dos signos em matemática está intrinsecamente relacionado ao processo de concepção das notações que dão significado aos signos criados por esta ciência. Sabemos que, desde Euler, a notação é a metade da parte necessária para que uma teoria tenha progresso. Foi ele quem definiu a maioria dos símbolos utilizados hoje por nós.

A forma visual de um signo associada a um conceito é extremamente relevante na definição da notação, principalmente em matemática. Um símbolo matemático deve possuir a propriedade de dizer visualmente qual é o seu conteúdo conceitual, isto é, deve carregar em sua imagem a qualidade de representar o que ele substitui. Dizendo de outro modo, o conteúdo visual da representação sígnica matemática é muito importante para estabelecer o desenvolvimento do raciocínio sobre o modelo que estamos estudando. Se ele for mal elaborado dificultará a percepção do que estamos observando. Boyer afirma que Euler foi o mais bem sucedido dos construtores de notação de todos os tempos, ele

> *"... escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível universitário de hoje [...]. Ao avaliar desenvolvimentos da matemática devemos sempre ter em mente que as idéias atrás das notações são de longe a melhor metade; quanto a isso também a obra de Euler marcou época"* (1974: 325-326).

As notações $\sum$ e $y = f(x)$ foram criadas por Euler. A primeira serve para designar somatória de números e expressões, e a segunda para designar uma função f que tem como domínio os elementos de um conjunto X qualquer, e como Imagem ou Contra-Domínio os elementos do conjunto Y. Sem entrar no rigor matemático das definições de conjunto, função, domínio e contradomínio, podemos visualizar por esta notação que um elemento x, se submetido à função f, irá se relacionar através da igualdade com um elemento y. Por enquanto, podemos dizer que isto é o bastante para dar início à discussão sobre o quanto é importante a notação no processo de formação de um signo. A imagem de um signo é básica para o processo de elaboração de um sistema e, na verdade, carrega e retrata visualmente aquilo que devemos reconhecer como conteúdo conceitual deste signo. A imagem da notação é essencial na visualização das relações internas de um sistema e, portanto, no desenvolvimento de qualquer teoria.



Dando continuidade às questões relativas às imagens e seus significados em matemática, vamos encontrar o trabalho realizado pelo artista gráfico M. C. Escher (1898-1972), que soube, brilhantemente, desenhar a superfície de um lado só. Estas representações dos espaços matemáticos, descobertas por Möebius, podem ser obtidas quando unimos as extremidades de uma fita de papel depois de ela dar uma volta. Um belo exemplo gráfico deste modelo, elaborado por Escher, das Faixas de Möebius, é o desenho do passeio das formigas. Ele apresenta a superfície de um lado só e mostra que esta representação espacial carrega em si as formas e a visualidade da noção de infinidade e de continuidade, muito discutidas na matemática do século XVIII. As Faixas de Möebius são modelos de construções que não possuem o lado de dentro ou o lado de fora e, assim, são representações espaciais elaboradas no plano que mostram aspectos de continuidade ao serem percorridas. Como vemos, as formigas passam de um lado ao outro na faixa sem abandonar a mesma superfície.

Depois de mostrar que há muito tempo utilizamos as imagens e os diagramas visuais para raciocinar em matemática, retomemos o enfoque que deixamos de lado por alguns momentos, voltemos à nossa discussão sobre as imagens geradas pelas mídias eletrônicas. Nos últimos anos, as novas tecnologias em comunicação, aliadas aos processos de simulações, alteram-se significativamente, e, junto com elas, nosso paradigma de percepção. As novas mídias associadas aos softwares e hardwares apresentam-nos uma nova forma de representar imagens. Hoje em dia, obter uma ótima visualização de um objeto qualquer, através dos computadores, e mais precisamente através das telas de alta resolução gráfica, torna-se algo corriqueiro. Podemos dizer que estas representações transformam-se em verdadeiros simulacros do mundo real e que são imagens hiper-realizadas e, por isso, são aparentemente tão reais quanto os próprios objetos que elas representam.

Por outro lado, dada a amplitude das variáveis que compõem o fenômeno de simulação de imagens, vemos que os produtores deste tipo de signo são obrigados a simplificá-los a fim de poder concretizá-los. Quando observamos o texto, *"Máquinas e imaginário"*, de Arlindo Machado, notamos quanto falta aprofundar nossas análises para melhor compreendermos as imagens geradas por estas novas mídias. Para o autor, as *imagens sintéticas* são

> *"... acusadas do contrário de seu processo de simplificação. Ao invés de se combater nelas o excesso de estilização, costuma-se modernamente identificá-las como exemplo máximo do "simulacro", um certo sentido de simulacro, tornado corrente sobretudo com a vaga intelectual das idéias de Jean Baudrillard (1985): hiperinflação da imagem, a ponto de substituir o real por seu modelo, o "efeito de real" camuflando a distância que implica toda representação, donde a confusão "epistemológica" entre realidade e signo. Mais produtivo, entretanto, do que essa estupeficante e anacrônica ressurreição do platonismo é o conceito de simulacro praticado por Giles Deleuze (1975: 259-271): ao invés de cópia degrada (Platão) ou hipertrofiada (Baudrillard), o simulacro é visto aqui como "potência positiva, que nega tanto o original quanto a cópia, tanto o modelo quanto a reprodução" (p.267). A "subversão" do simulacro, segundo Deleuze, está no corte que ele introduz nas distinções ontológicas clássicas entre essência e aparência, original e cópia, verdadeiro e falso, real e hiper-real. O simulacro vem demonstrar como são estreitas nossas categorias de interpretação; ele embaralha essas categorias, a ponto de comprometer*

sua operacionalidade. O simulacro já não é mais original, nem cópia, nem modelo, nem "reflexo", nem qualquer dessas categorias. Não é mais a sombra do objeto, porque pode muito bem existir e funcionar sem ele, em alguns casos até tornar-lhe o lugar, mas não é tampouco o objeto, pois não é da mesma natureza. Ele desconcerta justamente pela fundamental ambigüidade: possui propriedades que são específicas dos objetos físicos (portanto, não poderia ser imagem) e outras que são específicas das imagens (portanto, não poderia ser objeto)" (Machado 1993: 128-129).

Assim, Arlindo Machado nos mostra a iconicidade que comportam as imagens geradas como simulacro. Intrinsecamente relacionada a nossa discussão, *"a imagem sintética"* parece ser pura qualidade não realizada; é aquela que não depende de qualquer fato observável, ou seja, é *quase-imagem*. A indefinição que habita este tipo de signo, como simulacro, faz dele um representamen que é quali-signo, e que se transforma em sin-signo quando, a partir de informações armazenadas em meios magnéticos, através de uma linguagem de programação e num tempo qualquer de processamento, executa funções lógicas e apresenta-se virtualmente numa tela de vídeo.

As *imagens matemáticas* são aquelas produzidas pelas novas tecnologias fundamentadas em modelos e algoritmos lógicos e são números binários armazenados na memória de alguma máquina eletrônica. Daí, afirmar que são imagens, nos parece ser apenas força de expressão, pois, na verdade, não passam de informações codificadas numa memória digital por matrizes numéricas, que somente são possíveis de visualização nos programas lógicos que processam algoritmos, para em seguida, através das telas de vídeo e de um complexo sistema de bombardeamento de elétrons em tubos eletrônicos, poderem ser visualizadas pelos píxeis, em pontos de luz, simulando, assim, os modelos virtuais que concebemos mentalmente. Na visão de Nöth e Santaella, de maneira simplificada, este processo de elaboração da "*imagem infográfica"*, trata-se,

"... antes de tudo, de uma matriz algorítmica, imagem que é produzida a partir de três suportes fundamentais: uma linguagem informática, um computador e uma tela de vídeo. Embora a manifestação sensível da i-

magem na tela do computador seja uma questão elétrica, sua geração depende basicamente de algoritmos matemáticos" (1998: 159).

Para eles, as "*imagens pós-fotográficas"*, assim como as *"imagens sintéticas"* de Machado, são aquelas que possuem como princípios fundamentais os conceitos de modelagem e simulação. A modelagem deve ser considerada como uma estrutura que busca operacionalizar propriedades de um sistema de representação, portanto, abstrato e formal. Já a simulação é a experimentação simbólica deste modelo. De fato, verificamos que as questões que envolvem as *"imagens matemáticas"* são de um grau de complexidade ímpar. Como já citamos, existem muitas pesquisas nesta área de interpretação das *imagens matemáticas* que não é nosso foco, na medida em que pretendemos observá-las dando ênfase aos signos matemáticos. Por isso, remeteremos os nossos leitores aos capítulos *"Hegemonia da imagem eletrônica", "Simulação da imagem" e "O imaginário numérico"* do texto de Arlindo Machado, que aborda com profundidade uma série de temas e aspectos que devem ser considerados quando estamos a discutir o tratamento de imagens sintéticas (1993: 45-142). E assim, neste trecho de nosso trabalho, usamos algumas conclusões formuladas por todos os autores que citamos e desenvolvemos, de modo esquemático, os pontos principais que queremos ver aqui, neste tipo de signo.

Sabemos que este tema é muito mais complexo do que o abordamos, no entanto, queremos destacar que ao olhar para os meios eletro-eletrônicos de produção, enquanto suporte que são, e observar as possibilidades de transmissão de informação que possuem, concluímos que nas unidades das formas matemáticas, as potencialidades da linguagem se mostram como qualidades, tanto através dos meios que utilizamos para produzi-las por simulação de nossas idéias, como também nos aspectos das notações, que carregam em si a qualidade do que representam, na medida em que são notações que realmente representam seus signos.

A unidade da forma está na particularidade que as imagens possuem em estar, intimamente, associadas às concepções lógicas e, segundo Costa, também não-lógicas (Costa 1997: 14). Elas carregam qualidades em seu âmago que ainda se afinam com os espaços topológicos que as estruturam, o que será o próximo item deste capítulo. As qualidades lógicas e não-lógicas das imagens deixam transparecer as estruturas diagramáticas às quais elas pertencem. Podemos aí constatar a profunda característica icônica das imagens.

Finalizando os comentários e os exemplos sobre a questão da iconicidade das imagens e a qualidade lógica e não-lógica que elas carregam, vamos comentar sobre os *“grafos existenciais”* de Peirce. Ele tinha grande interesse na natureza diagramática da notação em lógica e, como dizia,

> *“... penso inquestionavelmente que meu melhor trabalho foi em Lógica. Primeiramente minha prova de que a garantia da Hipótese é principalmente o que é, a não ser que o intelecto humano seja da família do Espírito Criador, sendo inútil buscar qualquer verdade positiva... digo verdade empírica além da percepção direta. ... Em segundo lugar, minha distinção entre a Dedução Corolarial e Teoremática, uma vez afirmada, é tão óbvia quanto o Ovo de Colombo, e é de enorme importância. Então meu trabalho na Lógica dos Relativos simplesmente revolucionou a Lógica. Ele mostra a ausência de sentido em se supor que inferências de uma premissa são tão diferentes dos Silogismos“* (Santaella 1994: 237).

Assim, consultando uma das produções que ele indica: *“a lógica dos relativos”,* publicado em 1897, vamos encontrar a notação criada por ele para a lógica: *“os grafos existenciais”.* Neles constatamos as qualidades lógicas das imagens, as quais estamos analisando. Os *grafos existenciais* são signos criados por Peirce, que possibilitam o estudo de lógica e, mais que isto, possibilitam também identificar a iconicidade das imagens, as quais estamos descrevendo neste texto. Peirce, ao descrever a continuidade de seus modelos gráficos, no artigo *“lógica dos relativos”,* exibe a qualidade da imagem de ser contínua. Ele, a partir da noção de círculo, definido como uma coleção de pontos, descreve como torná-lo descontínuo ao traçar uma linha reta que o corta em um ponto. A construção que ele realiza demonstra como é possível raciocinar por imagens, principalmente quando queremos descrever as infinitudes que toma conta do mundo matemático (Peirce 1992: 159-160).

4.2. As formas em si

Depois de olharmos as similaridades que *as imagens matemáticas* possuem com as imagens mentais, devemos continuar em primeiridade, e através da observação destes signos, darmos mais um passo em direção a um outro nível de complexidade, que nos remeterá à segundidade. Peirce, fundamentado em suas três categorias, dividia os espaços topológicos matemáticos em três grandes áreas de estudo: a *Topologia* como sendo a geometria mais geral possível; a *Geometria Afim ou Geometria Projetiva,* que trata das projeções e das deformações invariantes no espaço e a *Geometria* propriamente dita, que é o espaço topológico mais conhecido por nós. Adotaremos esta subdivisão peirceana para mostrar o que as imagens possuem de características relativas aos seus modelos topológicos, e mais que isto, identificaremos também, nas formas visuais, as características destas três topologias.

No decorrer desta pesquisa, percebemos que a nossa maior dificuldade seria estudar os espaços topológicos em si, pelos aspectos da visualidade e pelas teorias que produzem. Também constatamos este fato, porque verificamos que as questões visuais estão relacionadas aos espaços matemáticos que as organizam; estão intimamente ligadas aos modelos lógicos e teóricos onde são geradas, como vimos no item anterior. E, para elaborar esta classificação, teríamos que dominar e explanar profundamente todas essas áreas de conhecimento: da topologia à geometria, o que é praticamente impossível para este texto, e também não é o objetivo de nossa tese de doutorado. Pudemos constatar ainda, que existe pouca literatura a respeito das questões semióticas relativas aos espaços matemáticos, dificultando ainda mais a nossa intenção.

Deste modo, optamos por elaborar uma abordagem semiótica dos espaços topológicos matemáticos, observando os aspectos visuais, lingüísticos e paradigmáticos que determinam este tipo de signo e, assim sendo, não abandonamos por completo esta proposta de estudar os espaços topológicos, porém, devemos destacar que o faremos de forma esquemática, que nos parece suficiente para a modelagem que ora propomos.

Para que realmente seja compreendida esta opção, a partir das idéias peirceanas, o melhor caminho que encontramos é o sugerido por Peirce, ou seja, o método de investigação científica, que adotamos desde o princípio deste projeto e propomos continuar percorrendo. Comecemos então por considerar a *geometria* como sendo um espaço métrico; um espaço que define relações internas de distância, medida e ordem de grandeza entre seus elementos. Aqui, ela será tratada simplesmente de *geometria* e, como exemplo, podemos citar a *geometria euclidiana.*

Já a *geometria afim, geometria projetiva* ou *geometria das sombras*, como também é conhecida, pode ser definida como aquela que preserva transformações invariantes no espaço e é, por isso, mais geral que a anterior. Ela engloba as *geometrias euclidianas* e *não-euclidianas*, ou seja, a *geometria* propriamente dita é considerada subconjunto da *geometria das sombras*, que, por sua vez, é considerada subconjunto *da topologia.*

Esta última deve ser definida como sendo o espaço topológico matemático mais geral possível. E, é claro, que ao tratarmos de teorias que são subconjuntos uma das outras, no momento em que estivermos analisando os signos de cada uma delas, sabemos que estamos lidando com elementos que pertencem a mais que um tipo de espaço, por exemplo, ao considerarmos os signos da *geometria projetiva*, sabemos que eles, também, são signos da *topologia.* Em razão disto, quando estivermos analisando os elementos da *geometria projetiva,* por exemplo, devemos destacar que observamos estas representações pelas características que a fazem pertencer a este conjunto e não à *topologia*.

A partir de agora, olharemos as *"imagens matemáticas"* relacionadas as suas formas topológicas, tentando extrair delas características que as fazem primeiridade, segundidade e terceiridade. Estes três aspectos devem ser analisados quando das potencialidades expressivas desses espaços e, portanto, eles serão vistos como dimensões que carregam em si a fisicalidade própria dos sistemas topológicos, portanto, em segundidade.

Neste estudo das imagens produzidas por modelos topológicos matemáticos e visualizadas através das novas mídias eletrônicas, segundo a semiótica, devemos estar cientes da necessidade de estruturar melhor, e com um grau de profundidade maior, os aspectos lógicos destes modelos. Então vamos a isto.

A *topologia* é a forma mais geral de representar os espaços lógicos matemáticos, pois possui um número reduzido de axiomas e regras que a torna um modelo estruturado. Ela também pode ser definida pelos aspectos realçados em primeiridade, na medida em que, aqui, é percebida pelo grau de liberdade que possui diante de seus poucos axiomas. A *topologia* está diretamente associada à teoria dos grafos finitos, que, por sua vez, está relacionada aos raciocínios combinatórios da geometria combinatória, da álgebra linear e da programação, de um modo geral e, em particular, da programação não-linear que estuda as redes neurais, e que observa os objetos matemáticos topologicamente pelo que eles são.

Observando ainda melhor este espaço topológico, verificamos que a teoria geral dos grafos gera imagens a partir de um conjunto abstrato de pontos sem propriedades, e de um conjunto de linhas que possuem como única propriedade o fato de unir dois pontos. Isto demonstra o grau de liberdade que os elementos: os pontos, pertencentes a estes modelos, possuem. Os seus elementos e suas relações internas são definidos de forma axiomática em duas dimensões. Os espaços topológicos matemáticos estudados através da teoria dos grafos e da teoria das redes estão associados a elementos como o acaso na topologia combinatória, e o indivisível das redes matemáticas associadas às redes cerebrais. Assim, como a abdução é uma hipótese do tipo fraco em argumento, a topologia também é um tipo fraco de modelo que está fundamentada em um número reduzido de axiomas.

De fato, a teoria das redes e a teoria dos labirintos possuem íntimas relações com a teoria dos grafos que, apesar de serem modelos lógicos matemáticos, operam com um grau de liberdade muito grande, assim como nossas criações em fase de concepção, através da lógica abdutiva. Tanto uma quanto outra estão relativamente livres das regras estabelecidas pelos axiomas. Nas palavras de Pierre Rosenstiehl,

> *"os grafos finitos dão lugar atualmente a intensas investigações, primeiro porque o caminho do pensamento contemporâneo talvez se assemelhe mais a uma rede do que a uma linha reta; além disso, porque a nossa análise dos sistemas naturais e a elaboração de sistemas artificiais dão vida a uma multiplicidade de redes e de labirintos"* (Einaudi 1988: 196).

Agora, passamos a analisar os aspectos que determinam a *geometria projetiva*, na qual predominam os elementos de segundidade. E como o próprio nome afirma, esta geometria opera com signos que, por princípio, são projeções de algo e, deste modo, devem ser realçados pelas características de oposição ao modelo que dá origem à projeção. Ação e reação da imagem e sua projeção são elementos destacáveis destes espaços topológicos. As transformações que estruturam as *geometrias projetivas* não preservam comprimentos e áreas, características da *geometria*, que será o próximo modelo que estudaremos. Porém, elas preservam aspectos que as deixam de mesmo tipo. Ou seja, determinadas cônicas como a elipse, a parábola ou a hipérbole, através das chamadas *transformações afins*, levam uma elipse à outra, uma parábola à outra ou uma hipérbole à outra. Assim, a *geometria projetiva* pode ser definida como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformações, que são as *transformações projetivas*.

Klein, em sua célebre conferência denominada *"Erlanger Programm",* descreveu a geometria, de um modo geral, como sendo o estudo das propriedades das figuras. Desta forma, mostrou que toda a teoria dos grupos pode ser reduzida à geometria e vice-versa. A teoria dos grupos permitiu unificar o conhecimento dos espaços topológicos abrindo as portas para os estudos das topologias. A compreensão dos seus significados muda a percepção sobre os espaços topológicos e as diversas geometrias, que antes eram conhecidas como modelos independentes, através da teoria dos grupos passam a ser definidas como um corpo único de estudo. A geometria euclidiana pode ser considerada como um caso particular na teoria dos grupos, tendo como princípio os

> *"estudos das propriedades das figuras, inclusive área e comprimento, que ficam invariantes sob o grupo de transformações obtidas a partir das translações e rotações do plano - as transformações ditas rígidas, equivalentes ao axioma não enunciado de Euclides de que as figuras permanecem invariantes quando deslocadas no plano”* (Boyer 1974: 400).

A geometria euclidiana pode também, através desta mesma teoria dos grupos, ser observada de modo mais genérico como um grupo que não preserva comprimentos e nem áreas, mas permanece grupo. Como vimos, uma cônica permanece cônica quando é submetida a uma transformação matemática na teoria dos grupos.

> *"Tais transformações, estudadas antes por Möebius, são conhecidas como transformações afins; caracterizam uma geometria conhecida como afim, assim chamada porque pontos finitos vão a pontos finitos sob quaisquer transformações dessas. É claro, pois, que a geometria euclidiana, do ponto de vista de Klein, é simplesmente um caso especial da geometria afim. A geometria afim por sua vez é apenas um caso especial de uma outra ainda mais geral - a projetiva"* (Boyer 1974: 401).

Finalizando estas questões em segundidade, podemos dizer que com a teoria dos grupos, a geometria torna-se um corpo de estudo mais completo e unificado, de modo que os modelos geométricos menos gerais passam a ser casos particulares dos mais gerais, abrindo espaço para o terceiro aspecto que falta analisar na classificação peirceana nas estruturas matemáticas.

Mais estruturado que os dois primeiros, vamos encontrar os espaços topológicos métricos ou as métricas propriamente ditas, nas quais estão presentes questões de ordem, grandeza e medida. Estes espaços devem ser percebidos por suas características em terceiridade pelas leis e regras que os determinam. A geometria euclidiana, já bem comentada em nosso texto, é o melhor exemplo deste tipo de modelo.

De fato, foi Arthur Cayley (1821-1895) que, ao publicar seus trabalhos entre 1854 e 1878, introduziu o conceito de inexistência de métrica nos espaços projetivos e o fez através da teoria da invariância, que é não métrica. No entanto, para Peirce, foi Felix Klein quem em 1872 soube generalizar as demonstrações de Cayley sobre as geometrias euclidiana e não-euclidiana. Ele transformou estas estruturas geométricas, através da teoria dos grupos, em espaços projetivos e, assim, a geometria euclidiana tornou-se um caso particular da geometria projetiva que mantém a noção de distância entre os pontos. Com isso, as geometrias ficaram classificadas em geometria elíptica de Riemann, hiperbólica de Lobachevsky e a parabólica de Euclides, ou seja, as duas primeiras negam o quinto axioma de Euclides, e são conhecidas por geometrias não-euclidianas, e a última é euclidiana e admite o quinto axioma como válido. Todos os três são subconjuntos dos espaços topológicos projetivos, mas somente a euclidiana deve ser considerada a *geometria* que conhecemos popularmente, e é aquela que, por manter a noção de distância, é considerada em terceiridade.

Há uma estreita relação de continuidade e coerência lógica entre os modelos e as imagens geradas por eles e, de fato, as "*imagens matemáticas*" estão totalmente relacionadas à lógica de construção dos espaços matemáticos, nos quais são concebidas. Assim sendo, estaremos, a partir de agora, observando estas imagens e suas características topológicas, analisando algumas imagens associadas aos seus modelos topológicos. Como já comentamos, apesar de estarmos considerando as imagens produzidas pelos meios eletro-eletrônicos de produção, sabemos que nem todas as imagens que observaremos aqui são produzidas exclusivamente pelas novas mídias, no entanto, como em geral as imagens são soluções de problemas, estamos apresentando problemas cujas soluções estão, de algum modo, relacionadas com as mídias eletrônicas. São os casos dos dois problemas topológicos: o problema dos convidados de uma festa e o das quatro cores de mapas. Por outro lado, também percebemos que na elaboração de modelos que analisam estas imagens eletrônicas, somos obrigados a compreender o que se contrapõem a elas. Assim, olharemos estes outros exemplos.

Quando iniciamos este projeto tínhamos em mente que ele seria uma grande classificação de imagens produzidas através de modelos matemáticos, e que teríamos praticamente pouca análise teórica geral e muita análise de imagem. Até por este fato, fizemos um levantamento significativo de signos produzidos pelas novas mídias eletrônicas. Hoje, constatamos exatamente o contrário. Notamos que estas representações visuais possuem muito da teoria que as estrutura e, por isso, constantemente estamos discutindo as questões mentais e lógicas, próprias do raciocínio matemático. Assim, devemos dizer que nossas análises dos diagramas a serem visualizados não serão tão extensas porque já refletimos sobre elas no corpo deste texto. Mas, mesmo assim, faremos comentários gerais sobre cada tipo de imagem, de modo a contextualizá-las.

4.2.1. Imagens geradas por espaços topológicos

4.2.1.1. Resolução gráfica do problema dos convidados de uma festa.

O problema dos convidados de uma festa ou simplesmente problema das vizinhanças propõe que vinte e cinco pessoas, ao serem convidadas para uma festa, devem encontrar nela pelo menos quatro pessoas que cada uma delas conheça e cinco que não conheça. O problema, usando procedimentos de computação, foi resolvido por Stanislaw P. Radziszowski e Brendan D. McKay e foi publicado na Revista Scientific American, de outubro de 1993. Este diagrama conecta pessoas, que são representadas por pontos, através de linhas vermelhas e amarelas. As vermelhas representam pessoas conhecidas e as amarelas as desconhecidas. O problema dos convidados de uma festa pode ser tratado como um grafo que, por definição, é um objeto relativo ao plano.

De modo mais consistente podemos dizer que: um grafo é um conjunto *G=(X,E),* onde *E* é o conjunto das linhas *e X* é o conjunto dos pontos que se relacionam entre si através das linhas. O grafo, como um espaço definido na topologia, determina que os pontos de X não possuem propriedade alguma e as retas possuem uma única propriedade, a de ser um elemento que relaciona dois pontos distintos ou coincidentes. Neste nosso exemplo, consideraremos o relacionamento entre pontos distintos porque os coincidentes representariam pessoas se relacionando com elas mesmas, o que não teria sentido neste problema. Denominamos os pontos de nós ou vértices, e de arestas as linhas retas ou curvas que relacionam os pontos. Um grafo que não tem duas arestas relacionadas aos mesmos nós é considerado um grafo simples. Usando a terminologia dos grafos, podemos dizer que, neste problema, as arestas não incidem em nós coincidentes, já que não há relação de conhecimento de si próprio, isto é, alguém não pode dizer que é amigo de si mesmo ou que, ao contrário, não se conhece. Esta relação não tem sentido e, por isso, não é considerada em nosso diagrama.

Os grafos finitos e simples, como é a característica do problema das vizinhanças, são figuras dos espaços topológicos as mais gerais possíveis e, dado o grau de liberdade que possuem, caracterizam-se como espaços matemáticos em primeiridade. Os grafos finitos são considerados objetos elementares da topologia e se relacionam matematicamente com a análise combinatória em geometria, com a álgebra linear e com a programação de sistemas. Na verdade, esta característica de primeiridade é perceptível quando observamos que esta teoria, pela falta de axiomas que a estruture mais rigorosamente, é de difícil sistematização. Ao analisá-la, vemos que a teoria dos grafos possui elementos que são signos de primeiro nível de compreensão, como os pontos e as retas. E, desse modo, facilmente pode ser associada aos objetos elementares da natureza como: nós, árvores, laços, ciclos, etc.

Outros aspectos que podemos notar nas relações internas dos grafos são as possibilidades de representações gráficas determinadas pelo diagrama, que permite a visualização da solução do problema das vizinhanças. A solução é aberta a uma infinidade de possibilidades de formas gráficas de representação, que dão o mesmo resultado e solucionam graficamente o problema, porém com imagens diferentes. Assim, os axiomas que determinam estes espaços topológicos afirmam que dois pontos distintos apenas se relacionam ou não, através de uma aresta. Quanto ao aspecto das linhas que ao serem traçadas relacionam dois pontos, os axiomas nada afirmam e, então, elas podem assumir qualquer aspecto. As possibilidades gráficas de solução do problema são infinitas na medida em que diferentes relacionamentos podem ser construídos, como podemos notar nas figuras 4_1 e 4_2. As duas representações gráficas são soluções do mesmo problema e a diferença está no fato de adotarmos, no primeiro caso, arestas em linhas retas e, no segundo, arestas em linhas curvas. As duas imagens mostram que infinitas formas visuais podem ser criadas para representar e dar solução gráfica ao mesmo problema.

4.2.1.2. O Teorema das Quatro-Cores

A primeira referência impressa do Teorema das Quatro Cores foi feita pelo matemático Arthur Cayley, em 1878. Peirce também esteve muito interessado no estudo dos problemas relativos às cores em mapas, dadas as características topológicas que os mapas apresentam. Este autor, em certa ocasião, afirmou que se interessava pelo assunto e pelas questões relacionadas à busca de um método de demonstração lógico que utilizasse procedimentos topológicos e geométricos. E foi a partir desta preocupação que Peirce desenvolveu o que ele considera a sua melhor produção: *a "teoria dos grafos existenciais"* (Faris 1981).

O Teorema das Quatro-Cores foi resolvido por Appels e Haken em 1976. Eles afirmavam que todo mapa, possível de ser construído, deveria ser colorido com no máximo quatro cores, de modo que nenhuma área vizinha de outra fosse pintada da mesma cor (Appels-Haken 1978). Estes matemáticos utilizaram o método da redutibilidade e da cadeia de Kempe para concluir suas demonstrações e, para concretizar sua prova final, tiveram que operar com elementos da teoria da probabilidade e princípios topológicos em espaços bidimensionais, utilizando 1.200 horas de processamento em computador, até chegar a uma conclusão definitiva. Esta forma de demonstração não foi bem aceita pelos matemáticos, pois não era baseada apenas no raciocínio lógico e dedutivo do ser humano.

Verificar que mapas, para nós grafos, necessitam de quatro cores para serem coloridos é algo evidente, no entanto, a resposta a ser dada é se apenas as quatro cores serão suficientes para pintá-los no plano. A demonstração deste teorema não pode ser realizada com procedimentos puramente lógicos, desta forma foi introduzida uma mudança significativa em nosso modo de realizar provas matemáticas. Até recentemente, para demonstrar teoremas, os matemáticos não utilizavam procedimentos que não fossem totalmente fundados em processos lógicos dedutivos, isto é, não utilizavam ferramentas adicionais como os computadores. De fato, demonstrações que necessitam de computadores para serem efetivadas ainda hoje não são bem aceitas como provas de teoremas matemáticos.

A novidade introduzida por Appel e Haken com sua longa demonstração do teorema das quatro-cores, já que o procedimento computacional para a prova é demasiadamente demorado e complexo, é a inclusão do computador. Em função desta estrutura mista de demonstração que utiliza lógica e computação, temos um certo sentimento de frustração quando não identificamos somente os passos lógicos dedutivos que fazem de uma prova um belo raciocínio humano.

Várias razões nos levam a ter esta sensação de descontentamento quanto à prova do Teorema das Quatro-Cores. Inicialmente, para realizá-la, o processamento computacional utiliza muitas possibilidades combinatórias (impossíveis de serem conferidas manualmente, pelo tempo necessário nesta conferência) e que influenciam significativamente nos procedimentos físicos da demonstração. Deste modo, um aspecto experimental é introduzido na prova e a estrutura puramente lógica deixa de ser básica para uma demonstração, adquirindo uma característica mista, entre a lógica e a de experimentação.

Por outro lado, esta demonstração faz parte de um conjunto de teoremas que nunca poderão ser conferidos apenas através da análise de seu metacódigo. Em outras palavras, a metalinguagem utilizada para conferir estes determinados teoremas nunca terá uma estrutura simplesmente algorítmica. Assim, a questão de conferência de teoremas matemáticos que utilizam procedimentos mistos, lógicos e computacionais, será sempre enfrentada com dificuldade. O Teorema das Quatro-Cores é um caso de sucesso na demonstração proposta, porém, em outros problemas mais complexos, este tipo de demonstração parece deixar muitas questões sem respostas e o problema em si continua em aberto; como exemplo, podemos tomar a recente demonstração do teorema relativo à classificação de grupos finitos simples:

> *"O teorema de classificação de grupos finitos simples tem uma demonstração muito extensa, para a qual um grande número de matemáticos contribuiu, por longos anos, utilizando uma grande quantia de cálculos por computadores. Nenhum ser humano é capaz de verificar esta demonstração na parte realizada por computadores, apenas outros computadores. Um novo campo emerge sob nossos olhos, isto é, uma matemática experimental na qual a demonstração está vinculada a um procedimento que envolve atividades experimentais dedutivas e empíricas e que dependem dos parâmetros físicos dos computadores, que estão realizando a demonstração"* (Marcus 1997a: 12).

A demonstração do Teorema das Quatro-Cores não foi bem recebida pelo mundo matemático, porque não permitia que qualquer pessoa que tivesse a intenção de compreendê-lo, o pudesse fazer somente com operações mentais, lápis e papel. Para alguns matemáticos, aquela sensação de certeza de que algo foi concluído deixa de existir, e os computadores efetivamente tomam conta do que, até então, parecia sagrado e inviolável. A partir daí o pensamento humano está irremediavelmente associado aos meios de produção eletro-eletrônico, que são nossas verdadeiras próteses. O *“corpo cyborg”* do artista plástico Stelarc e seu *“terceiro braço”* - ver figura 2_18 -, assim como as demonstrações matemáticas realizadas pelos computadores, mostram que os seres humanos

> *“cada vez mais operam com corpos substituídos em espaços remotos, eles funcionam – com imagens cada vez mais inteligentes e interativas. A possibilidade de imagens autônomas gera um resultado inesperado da simbiose do homem-máquina. O pós-humano pode muito bem ser manifestado na sua forma inteligente de imagens autônomas”* (Domingues 1997: 52).

O teorema das quatro-cores, apesar de não parecer um assunto relevante para este trabalho, pelas imagens que produz, deve ser destacado pela mudança lógica profunda que apresenta para nossa percepção. Os estudos das representações dos grafos sobre superfícies são considerados atualmente como sendo um assunto extremamente desafiante, pois estão intimamente relacionados à teoria dos grupos, à álgebra linear e à topologia combinatória. Os grafos também são importantes quando tratamos dos problemas de existência, de linearidade e de otimização de estruturas em redes. Eles nos levam diretamente ao *"fenômeno das redes"* que será certamente, no elenco das abstrações de nossa época, o que mais profundamente irá marcar o paradigma de nossos dias. (Einaudi 1988: 229-246).

4.2.2. Imagens geradas através das geometrias projetivas

4.2.2.1. A Garrafa de Klein e a Faixa de Möebius

A Garrafa de Klein é uma superfície tridimensional, não orientada, que pode ser construída a partir da união do fim de um cilindro com seu início, após sofrer uma torção, formando um oito, como na figura a seguir. Esta concepção tridimensional forma uma garrafa que possui uma superfície única, assim como as Faixas de Möebius. A Garrafa de Klein pode ser construída como sendo a composição de duas Faixas de Möebius, que fazem uma revolução criando uma figura tridimensional. Ela também pode ser obtida a partir de outra concepção: consideremos um tubo que sofre uma torção em torno de si mesmo, formando um oito e uma outra superfície de revolução que é um pedaço de curva. A composição destas duas formas determina uma superfície no espaço projetivo tridimensional, que possui uma auto-intersecção. Esta auto-intersecção deve ser observada como uma representação que gera valores de coordenadas em quarta dimensão. Podemos dizer que a Garrafa de Klein é uma representação tridimensional que tem valores do espaço quadridimensional, especificamente na sua auto-intersecção.

Similar a estes modelos nós vamos encontrar as Faixas de Möebius, que são representações bidimensionais com valores no espaço tridimensional. Para construí-las, consideremos uma fita de papel que após sofrer uma torção, pode ser unida em suas duas pontas. É na operacionalização e construção das formas da Faixa de Möebius e da Garrafa de Klein que identificamos as representações matemáticas sendo elaboradas em modelos dimensionais diferentes. Ao projetá-las espacialmente, verificamos que, em suas transformações, os signos matemáticos que operam em determinados espaços, ao sofrerem transformações no sentido projetivo, transcendem a sua dimensionalidade e adquirem valores em outra dimensão.

As Garrafas de Klein e as Faixas de Möebius são superfícies fechadas unilateralmente e não podem ser construídas no espaço euclidiano, pois extrapolam a dimensionalidade deste espaço. As Garrafas de Klein e as Faixas de Möebius são construções possíveis de serem realizadas, pois seus pontos em quarta e terceira dimensões podem ser elaborados como projeção na tridimensionalidade do espaço em que vivemos. O interior e o exterior da garrafa de Klein estão definidos juntos, isto é, passamos do interior da garrafa para seu exterior de modo contínuo. O mesmo ocorre nas Faixas de Möebius, nas quais passamos de um lado ao outro sem perder a continuidade das formas. Em suas elaborações visuais, as duas concepções gráficas são representações construídas num determinado espaço visual, e que possuem pontos em dimensões superiores em relação aos quais foram concebidas, produzindo, assim, objetos paradoxais diante de nossa observação que se fixa em um espaço apenas. Nós vamos encontrar vários desenhos com estas características nos trabalhos de M. C. Escher. A contradição visual gerada por representações realizadas no plano – em folhas de papel – representando modelos tridimensionais, geram figuras que expõem contradições.

Vamos citar aqui alguns desenhos que possuem estes paradoxos visuais: *“Belvedere”* de 1958, *“Côncavo e convexo”* de 1955, *“Ascendente e descendente”* de 1960 e a *“Queda-d’água”* de 1961. Assim, podemos constatar que Escher trabalhava muito com este conceito.

4.2.2.2. Imagens produzidas pelo Sistema Optiverse

As imagens realizadas pelo “Sistema Optiverse” foram produzidas por George Francis, John M. Sullivan e Stuart Levy, e consistem em um novo método otimizado para inverter uma esfera matemática pelo lado do avesso. Esta inversão é realizada através de processamentos computadorizados que operam com o modelo lógico de envolvimento de Rakke e com a minimização elástica das superfícies esféricas de Willmore. Cada processamento computacional começa com uma transformação mínima da superfície, através de um ponto crítico onde se dá a inversão. No momento da inversão, este ponto crítico assume características similares às da Garrafa de Klein. Neste ponto, a esfera transforma-se e as intersecções passam a representar parâmetros projetivos em quarta dimensão (Banchoff & Max 1981).

Para a divulgação e visualização deste trabalho foi produzido um vídeo que mostra os efeitos provocados pelo processo de inversão. Ele foi elaborado por Camille Goudeseune e destaca eventos topológicos que foram apresentados na *“Siggraph Eletronic Theater”*, em 1998 e que utilizaram uma *Silicon Graphics* e softwares como: *Custom Software, Renderman, Geomview* e *Jaleo*. Estas imagens podem ser encontradas na rede mundial de computadores cujo endereço eletrônico é: http://new.math.uiuc.edu/optiverse/, assim como em um artigo detalhando todo o trabalho de John M. Sullivan, com o título *“The Optiverse and Other Sphere Eversions”*. Não trataremos dos aspectos matemáticos desta modelagem de inversão da esfera porque não é nosso objetivo neste momento.

Os modelos matemáticos que operam nos espaços projetivos, assim como a Garrafa de Klein, as Faixas de Möebius e as construções computadorizadas do software Optiverse para inversão da esfera, admitem transformações lógicas que as fazem transitar de modelos de representações visuais de espaços com uma determina configuração para configurações maiores, isto pode ser confirmado nos nossos exemplos de duas dimensões para três, na faixa de Möebius, e de três para quatro, na Garrafa de Klein e nas imagens geradas pelo sistema Optiverse. Quando criamos estas relações de similaridade entre os modelos, encontramos, às vezes, situações que nos parecem paradoxais, como quase todos os trabalhos de Escher.

4.2.3. Imagens geradas pelas geometrias

4.2.3.1. A Geometria Fractal

Aqui, teceremos alguns comentários sobre a geometria fractal que não poderia faltar neste trabalho já que foi uma das teorias matemáticas motivadoras desse projeto. Ela foi analisada em nossa dissertação de mestrado, quando observávamos as imagens geradas pelos meios eletro-eletrônicos de produção. As imagens fractais são consideradas uma das mais belas formas definidas por modelos matemáticos e a geometria fractal tem características próprias que permitem estudar, entre outros modelos, aqueles que se adaptam as formas de crescimento das plantas ou as formações das geleiras na Terra. A Figura 4_12 expõem as similaridades visuais e de estrutura existente entre os flocos de neve ou as geleiras e as imagens fractais. Esta foto foi produzida por John Reader e apresenta uma imagem real das formações rochosas cobertas de gelo nas montanhas de Kilimanjaro.

A geometria fractal nasceu como uma representação matemática há muito tempo, mas somente veio a ser identificada como tal, recentemente. Como exemplo deste tipo de geometria podemos citar os triângulos estudados por Blaise Pascal, por volta do século XV. Apresentamos na Figura 4_14 as imagens geradas por ele para estudar os jogos e a teoria das probabilidades. Ele foi um grande estudioso francês e concebeu a primeira máquina de calcular que adicionava números inteiros. Podemos dizer que estas máquinas e suas formas de calcular com números foram as precursoras dos computadores. Os triângulos de Pascal já eram conhecido dos matemáticos há mais de 600 anos e foram estudados pelos chineses em peças de porcelana realizadas em 1.303 por Ssu Yuan Yii Chien do Chu Shih-Chieh, que mostra os coeficientes binomiais de oitava ordem (Peitgen 1992:84), e em 1781 por Sampō Dōshi-mon de Murai Chūzen, mostrando a forma sangi dos numerais (Peitgen 1992:85).

Hoje sabemos que as imagens fractais podem ser associadas aos elementos da natureza como: montanhas e estruturas celulares. Além desses, há também os modelos que estudam os fenômenos consideramos caóticos, como os estudados por Rössler, que são casos particulares dos atratores de Lorentz e que apresentamos na Figura 4_15. Esta imagem apresenta a trajetória realizada pelos atratores em um espaço topológico de representação em três dimensões.

A geometria fractal é estruturada a partir de um modelo cíclico de geração de imagens e também é um processo de construção geométrica que se auto-alimenta, isto é, são procedimentos matemáticos nos quais as operações de transformações a serem executadas possuem como dado de entrada, para processamento, os mesmos parâmetros obtidos como dado de saída ou resultado no processamento anterior. Esta é uma relação não linear de entrada e saída de informações, que depende de uma operação repetitiva e constante, e que exerce influência sobre os espaços de representação e sobre as imagens geradas.

As imagens fractais foram extensamente estudadas nos anos 80 pelos professores doutores Peter H. Richeter e Heinz-Otto Peitgen, da Universidade de Bremen, nos Estados Unidos da América. Os dois, quando se encontraram, desenvolveram um projeto de visualização de imagens *“fractais”* a partir das séries do matemático Benoit B. Mandelbrot, que foi o primeiro a estudar profundamente a geometria fractal aplicada ao contorno de objetos da natureza. Richeter e Peitgen organizaram uma exposição, denominada *"Fronteira do Caos"* (1986), que possuía trabalhos de geometria fractal totalmente elaborado em procedimentos matemático e que geravam imagens que podiam ser observadas pelas suas características fundadas nos meios eletro-eletrônicos de produção. As imagens fractais, apesar de serem associadas às imagens do mundo real e da natureza, na verdade são signos gerados por processos matemáticos. Elas são modelos mentais materializados em imagens construídas por procedimentos matemáticos.

Para classificar as imagens fractais segundo as categorias do pensamento de Peirce: em primeiridade, segundidade e terceiridade, devemos observar os princípios de geração dos modelos. Esclarecendo melhor este aspecto de organização, verificamos que não é a geometria fractal que determina a classificação das imagens nas categorias peirceanas, mas sim, o espaço topológico sobre os quais as imagens são geradas, e assim vamos encontrar sistemas fractais definidos em primeiridade, segundidade e terceiridade. Neste texto apresentamos uma com características mais simples, os triângulos de Pascal em espaços bidimensionais; uma com característica projetiva, os atratores de Lorenz, e a última com características de terceiridade que são as séries de Gaston Julia que operam nos espaços tridimensionais, estudadas por Benoit B. Mandelbrot. Para este autor

> *"a natureza não exibe altos graus de complexidade, mas simplesmente diferentes níveis. O número de distintas estruturas para os modelos naturais é, para todos os propósitos, infinito" (1982).*

Vamos apresentar alguns modelos fractais constatando que se fôssemos analisar os espaços topológicos construídos por esta geometria e por seus modelos lógicos, isto nos conduziria a um aprofundamento das concepções matemáticas neste campo do conhecimento, o que não é o nosso objetivo com este trabalho. Portanto, para quem se interessar pelo assunto e pelo conhecimento matemático produzido por cada tipo de modelo fractal, aconselhamos o livro *"Chaos and Fractals New Frontiers of Science"*, de Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürges e Dietmar Saupe (1992), que analisa vários modelos fractais e suas diferentes estruturas matemáticas.

Nas próximas páginas temos imagens fractais produzidas a partir das Séries de Benoit B. Mandelbrot.

Elas foram extraídas do livro "Chaos and Fractals: New Froti-ers of Scince", de Heiinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürges e Diet-mar Saupe e apresentam uma seqüência de imagens que mos-tram a evolução da Geometria Fractal.

Elas correspondem à Figura 4_16.

4.2.3.2. Grupos de simetrias, o software *Mathematica* e o Teorema de Fermat

Os grupos de simetrias geram modelos que são as formas mais estudadas pela matemática. Desde os gregos, o conceito de simetria está associado à harmonia, equilíbrio, proporções ideais e estruturas perfeitas. Encontramos muitas formas de simetria no plano e em três dimensões. No plano, destacaremos as *simetrias bilaterais reflexivas*, ou *simetria do espelho*, que é aquela que aparece nas asas da borboleta. Podemos também considerar a *simetria rotativa* e a *translativa*, que são as que transformam os objetos de uma maneira invariante nos espaços. A primeira é gerada a partir de um ponto fixo e a segunda através de uma translação paralela da figura ao longo de um eixo. (Nöth 1996).

Ao ampliar nossa percepção das simetrias para àquelas produzidas no espaço, vamos encontrar duas espécies importantes de simetria, a cilíndrica e a esférica. A *simetria cilíndrica* é aquela que permanece invariante na forma quando gira em torno de um eixo no espaço tridimensional e a *simetria esférica* é aquela que gira a partir de um ponto fixo no centro da esfera. Vários padrões geométricos podem ser gerados quando combinamos estes tipos de transformações invariantes no espaço. Verificamos os modelos gerados nas imagens apresentadas nas Figura 4_17, extraída do livro “The language of mathematics: making the invisible visible”, de Keith Devlin.

Outros exemplos que queremos observar neste trabalho são os modelos lógicos construídos para representar graficamente os poliedros. Eles são figuras geradas na geometria euclidiana e são construções realizáveis em uma espacialidade axiomaticamente estruturada. As representações realizadas em outras geometrias, como as não-euclidianas, não geram modelos inconsistentes, por estarem definidas em um mesmo espaço topológico geométrico. E assim, todas as imagens produzidas para representar espaços geométricos euclidianos e não-euclidianos são modelos que admitem uma métrica de referência e por isso são classificados como terceiridade em nosso trabalho. Como exemplos, tomemos as figuras geradas pela geometria elíptica, hiperbólica e parabólica, realizadas no software Mathematica da empresa Wolfram Research Inc.

As últimas imagens que faremos referência neste texto são aquelas produzidas para representar os modelos gráficos do Teorema de Fermat. Elas são elaboradas segundo uma métrica nos espaços topológicos de terceira dimensão, e assim também devem ser classificadas como imagens em terceiridade.

4.3. A lógica das formas

Ao olharmos atentamente para *as imagens matemáticas* notamos que os algoritmos que as fundamentam são modelos extraídos inicialmente da geometria de Euclides, em seguida dos estudos das cônicas de Poncelet, que culminaram com as transformações afins de Möebius e Klein, passando por Lobachevsky, Bolyai e Riemann com as geometrias não-euclidianas, até chegar hoje às diversas topologias que sabemos existir. Agora, vamos analisar os modelos lógicos matemáticos que constituem suas formas, e devemos fazê-lo considerando o momento histórico que foram concebidos.

O ramo da matemática que estuda os espaços topológicos e suas representações, e que, obviamente, está preocupado com as imagens e com as formas de representações visuais, começou a ser estruturado a partir de Euclides. Atualmente, na topologia, na teoria dos grupos e na álgebra linear, este estudo da matemática chega a ser tão amplo que podemos dizer que tem conexões com quase toda a matemática conhecida por nós. Inicia-se nos estudos de proposições da geometria propriamente dita, passa pela geometria projetiva, até chegar à topologia e, porque não dizer, à lógica. Esta última pode ser observada pelo sistema lógico axiomático concebido por Peirce, denominado de *grafos existenciais.* O autor utiliza os diagramas visuais para construir um discurso lógico, mostrando que estes diagramas determinam as expressões abstratas que constróem a ciência lógica, assim, podemos ter uma lógica concebida através das *imagens matemáticas*.

Sabemos que a Geometria é um ramo da matemática que estuda as formas e as dimensões espaciais destes tipos de signos. Ela estuda, também, as propriedades de conjuntos de elementos que são invariantes sob determinados grupos de transformações, e isto significa dizer que ela estuda as propriedades dos objetos sólidos, das superfícies, das linhas e dos pontos, assim como das relações entre estes objetos e suas propriedades, quando estes signos sofrem alterações espaciais, assim como, reflexão, rotação e translação.

Fundamentalmente os signos matemáticos podem criar espaços topológicos e uma série de relações lógicas internas, de modo que, ao pesquisá-los, podemos observar suas representações visuais, bem como, percebê-los mentalmente através das relações lógicas de seus modelos. Por outro lado, se olharmos de forma ingênua para a geometria, sem qualquer rigor matemático, podemos dizer que ela serve para separar partes do espaço e dividi-lo em fronteiras. Podemos dizer que os pontos são as fronteiras das linhas, as linhas são as fronteiras das superfícies e as superfícies são as fronteiras dos sólidos e paramos por aí, porque, dada a tridimensionalidade do mundo em que vivemos, nossa percepção somente pode verdadeiramente visualizar até aí. Qualquer outro tipo de espaço topológico com dimensão superior a três, que facilmente pode ser definido em matemática, deve ser considerado como uma postulação de nossa imaginação, impossível de ser visualizado no mundo dos objetos tridimensionais em que vivemos. Por isso, para entendermos melhor as relações geradas nas diversas geometrias e na topologia comecemos por observar alguns aspectos históricos que marcaram o pensamento dos geômetras.

Considerada como a pura ciência do espaço, a Geometria quase sempre foi definida com base nos cinco axiomas ou postulados de Euclides. Ela foi totalmente formulada e deduzida a partir destes axiomas nos textos de *"Os Elementos"* do matemático de Alexandria por volta de 300 AC. As deduções da *geometria euclidiana*, como é chamada, perduraram por 1.500 anos como sendo o conhecimento matemático mais importante que herdamos pensamento grego. Talvez nenhum livro, além da Bíblia, tenha tido tantas edições como *"Os Elementos de Euclides",* mas, certamente, o seu conteúdo é o pensamento matemático que maior influência teve sobre a história da humanidade.

Estas concepções deixaram de ser a base para as formulações topológicas, a partir da descoberta das *geometrias não-euclidianas,* que são aquelas que não necessitam do quinto axioma, o das paralelas, para serem elaboradas. E então, nossas concepções físicas e abstratas do mundo matemático começam a se alterar. Desde seu início, nos estudos de geometria, os matemáticos entendiam que o quinto axioma poderia ser deduzido logicamente dos outros quatro. Com as descobertas dos matemáticos Lobachevsky, Bolyai e Riemann, nossa compreensão sobre a dimensão dos objetos e sua espacialidade ganhou novos métodos de análise que surgiram abordando questões como a curvatura dos espaços de Riemann. Estas questões foram fundamentais para a formalização da *Teoria da Relatividade* de Albert Einstein.

As descobertas das *geometrias não-euclidianas* se deram a partir da tentativa de substituir o quinto axioma de Euclides por um teorema e, como já analisamos, isto não foi possível e, assim, descobriu-se uma nova forma lógica de representação espacial. Foram feitas muitas tentativas de se demonstrar o quinto postulado a partir dos outros quatro, mas todas elas em vão. Legendre passou 40 anos de sua vida tentando resolver o postulado das paralelas e conseguiu mostrar que o quinto axioma é equivalente a dizer que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Aí, tentando mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo não pode ser menor que 180^o, ele assumiu que a partir de qualquer ponto no interior de um ângulo sempre é possível desenhar uma reta que cruza ambos os lados deste ângulo. De fato, ele só não sabia que isto era equivalente a admitir o quinto postulado de Euclides; Legendre nunca percebeu o seu erro.

A primeira pessoa que realmente entendeu o problema do postulado das paralelas foi Gauss. Em 1817 ele estava convencido de que o quinto axioma era independente dos outros quatro. A partir daí, começou a trabalhar nas possíveis conseqüências desse fato, e assim chegou a uma geometria onde mais que uma reta pode ser paralela a outra por um ponto determinado. Gauss nunca publicou este fato, entretanto, ele comentou o que havia descoberto com seu amigo Farkas Bolyai que também já havia trabalhado no postulado das paralelas. Realmente, foi Janos Bolyai, filho de Farkas Bolyai que, em 1823, escreveu ao seu pai dizendo,

> *"...descobri coisas tão maravilhosas que fiquei surpreendido... a partir do nada, criei um mundo novo e estranho"* (O'Connor & Robertson 1996).

Gauss depois de ler as provas de Janos Bolyai escreveu ao amigo, dizendo*: "eu considero este jovem geômetra um gênio de primeira ordem"*. De fato, Bolyai apenas assumiu que uma nova geometria era possível, não chegando, no primeiro instante, à teoria propriamente dita. Ele admitiu a falsidade do quinto postulado e, assim, procurou encontrar uma contradição em sua demonstração, isto é, tentou demonstrar por absurdo. Porém, o que tinha de inédito nesta demonstração era o fato de admitir que a nova geometria era possível.

Em 1829, outro matemático, Lobachevsky, sem conhecer o trabalho de Bolyai, publicou um texto sobre a *geometria não-euclidiana*. Nem Bolyai, nem Gauss conheceram o trabalho de Lobachevsky, porque só foi publicado em russo. Na teoria desenvolvida por ele, verificamos que, assim como Bolyai, Lobachevsky baseou

> *"sua geometria na hipótese do* â*ngulo agudo e na suposição de que a 're-ta' tem comprimento infinito"* (Costa 1990: 16*).*

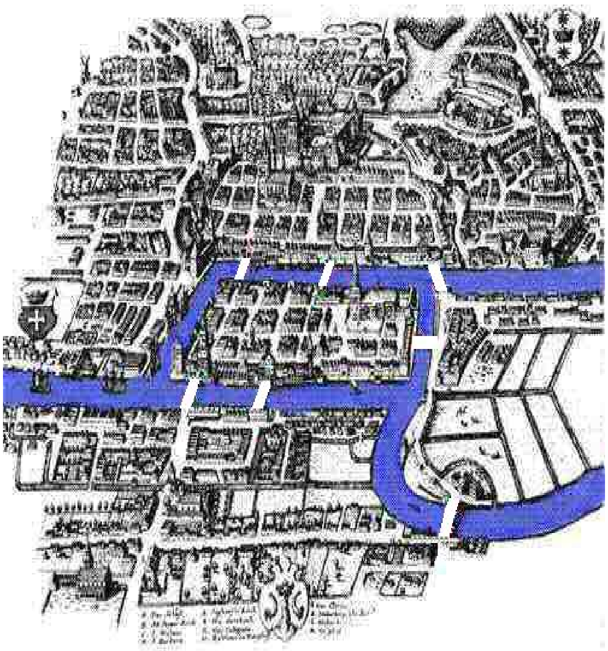
Bolyai e Lobachevsky admitiam em sua *geometria hiperbólica*, como ficou conhecida, a negação do quinto axioma de Euclides e a validade dos axiomas da incidência, da ordem, da congruência e da continuidade. Eles chegaram à conclusão que o número de paralelas deste espaço geométrico era maior que um, no entanto, a formulação das geometrias não-euclidianas somente se completou em 1854 com Riemann, em sua tese de doutorado. Esta conferência não foi publicada até 1868, dois anos depois da morte de Riemann, mas veio a ter grande influência no desenvolvimento das geometrias não-euclidianas.

O matemático que colocou a geometria não-euclidiana de Bolyai-Lobachevsky nas mesmas bases que a geometria euclidiana foi Eugênio Beltrami. Em 1868 escreveu um texto que produziu um modelo bidimensional para a geometria não-euclidiana dentro da tridimensionalidade da geometria euclidiana. De fato, o modelo de Beltrami estava incompleto, mas reduziu o problema de consistência dos axiomas da geometria não-euclidiana para um problema de consistência dos axiomas na geometria euclidiana. O trabalho de Beltrami só foi completado em 1871, por Klein que, ao modelar as geometrias não-euclidianas como a geometria elíptica de Riemann, baseado em uma noção de distância definida por Cayley, propôs uma definição generalizada para distância.

Como vimos, Klein mostrou que existem três tipos diferentes de geometrias: a hiperbólica de Bolyai-Lobachevsky, a elíptica de Riemann e a euclidiana. Os conceitos não euclidianos foram inicialmente formulados e desenvolvidos axiomaticamente de maneira abstrata. O desenvolvimento das geometrias hiperbólica e elíptica são casos de deduções efetuadas apenas com signos matemáticos abstratos. A visualização efetiva das imagens destes modelos somente se processou mais tarde, depois que a teoria toda já havia sido concebida. Hoje, com o uso das novas tecnologias, podemos construir as representações não euclidianas de modo mais fácil.

Com a descoberta das geometrias não-euclidianas as idéias topológicas invadiram por completo as áreas do conhecimento matemático dando nova vida ao que chamamos de topologia. Vejamos, então, um pouco da história da construção deste ramo do conhecimento matemático que sempre andou paralela à história da geometria e hoje pode ser classificado em três ramos: a topologia combinatória, a algébrica e a diferencial.

Figura 4_25 – Problema das Pontes de Konigsberg



Em 1736, Euler publicou um texto sobre a solução do problema da ponte de Königsberg, que traz considerações sobre a geometria das posições. Este texto tinha como título *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"*. No desenho a seguir, mostramos esquematicamente o problema que aborda a possibilidade de se realizar um passeio, de tal forma que cada ponte fosse transposta apenas uma única vez. Euler, analisando este assunto topológico, demonstrou a impossibilidade de resolvê-lo e introduziu o estudo sobre as geometrias projetivas.

Em 1750, Euler transforma o conhecimento nesta área fazendo com que os estudos dos espaços geométricos deixem de tratar apenas das questões sobre medida. Ele escreve uma carta para Goldbach elaborando sua formulação sobre os poliedros. Ele afirma que v - e + f = 2, onde **v** é o número de vértices do poliedro, **e** é o número de extremidades e **f** é o número de faces. É interessante perceber que este assunto é bastante simples e deve ter sido conhecido de Arquimedes e Descartes, pois ambos escreveram sobre os poliedros. Euler publica detalhes sobre esta fórmula em 1752 em dois documentos, nos quais, no primeiro, admite não poder provar a fórmula, já no segundo, dissecando os sólidos em fatias tetraedrais, ele a demonstra. Porém, esta prova tem alguns problemas em sua elaboração, principalmente quando assume que sólidos convexos possuem uma linha reta que une quaisquer dois pontos sobre ela, sendo estes dois pontos internos ao sólido, na verdade isto é falso.

Johann Benedict Listing foi o primeiro a usar a palavra topologia em seu texto. Ele publicou o trabalho *"Listing's Topological Ideas",* que trata de temas como as faixas de Möebius, quatro anos antes deste, e também estudou componentes de superfícies e suas conectividades. De fato, o primeiro resultado realmente conhecido sobre Topologia foi realizado por Möebius, em 1865. Em seus estudos, vemos a descrição detalhada das Faixas de Möebius; Listing também descreveu a unilateralidade como sendo uma propriedade de sua descoberta. Para realizar este trabalho, ele pensou numa superfície coberta por triângulos orientados e chegou à conclusão que suas faixas não poderiam ser preenchidas por triângulos orientados compatíveis.

Em 1872 Felix Klein ampliou as discussões sobre os espaços topológicos através da teoria dos grupos, ele introduz o conceito de grupo que amplia o relacionamento entre as diferentes áreas de conhecimento na matemática. Para ele,

> *"uma coleção de elementos forma um grupo com relação a uma dada operação se 1) a coleção é fechada sob a operação, 2) a coleção contém um elemento identidade com relação à operação, 3) para cada elemento na coleção há um elemento inverso com relação à operação e 4) a operação é associativa. Os elementos podem ser números (como na aritmética), pontos (na geometria), transformações (em álgebra ou geometria) ou qualquer coisa. A operação pode ser aritmética (como a adição ou multiplicação), ou geométrica (como uma rotação em torno de um ponto ou eixo) ou qualquer outra regra para combinar dois elementos de um conjunto (tais como duas transformações) de modo a formar um terceiro elemento do conjunto"* (Boyer 1974: 400).

Klein, em seu *"Erlanger Programm"*, já citado neste trabalho, descreve a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um particular grupo de transformação e, assim, uma cônica de um determinado tipo - elipse, parábola e hipérbole - permanece deste mesmo tipo quando é submetida a uma transformação que mantém as características de grupo. Estas transformações não preservam comprimentos e áreas e, assim, vemos surgir a geometria afim e a geometria projetiva, o primeiro passo para a concepção da verdadeira topologia (Boyer 1974: 401).

A idéia de conectividade foi rigorosamente estudada por Poincaré, em uma série de estudos realizados em 1895. Ele introduziu o conceito de homologia e deu uma definição mais precisa sobre conectividade que a de Eurico Betti, que associa números com o espaço. A fórmula do poliedro convexo de Euler foi generalizada para não-poliedros convexos por Jonquières. E, a partir disto, Poincaré generalizou o fato para espaços n-dimensionais. Operando com as questões da conectividade, ele introduziu o conceito de homotopia em 1895. Os estudos nesta área da matemática somente vieram a se desenvolver entre 1920 e 1940, quando este assunto provocou uma verdadeira alteração na percepção dos métodos utilizados para a topologia algébrica que se estenderam para a álgebra e para a análise.

Já as questões sobre convergência começaram a ser desenvolvidas na topologia em 1817, com Bernhard Bolzano que, ao remover a associação de convergência de uma sucessão de números e associá-la a um subconjunto qualquer infinito de números reais, fez o conhecimento nesta área se multiplicar. Cantor em 1872 introduziu o conceito de derivada de um ponto fixo e o conceito de limite, e também apresentou a idéia de conjunto aberto, que seria outro conceito fundamental para a topologia do ponto fixo.

Weierstrass, em 1877, deu uma prova rigorosa do que seria conhecido como o famoso Teorema de Bolzano-Weierstrass, que declara que: dado um subconjunto infinito S de números reais, podemos dizer que ele possui pelo menos um ponto p de acumulação, isto é, ele introduziu nesta demonstração o conceito de vizinhança de um ponto, fundamental para o desenvolvimento da matemática daí por diante. Por outro lado, Hilbert, usando este conceito de vizinhança, em 1902, elaborou trabalhos sobre transformações em grupos diferenciais e análises sobre o conceito de continuidade em espaços topológicos.

Em 1906, Maurice Fréchet mostrou que a teoria das funções não poderia mais viver sem uma visão geral da teoria dos conjuntos. Fréchet estendeu o conceito de convergência dos espaços euclidianos definidos em espaços métricos, e também mostrou que as idéias de Cantor sobre subconjuntos abertos e fechados eram aplicáveis a espaços métricos. E ainda, junto com Hilbert, ele aprofundou os estudos sobre os conjuntos abstratos e os espaços abstratos. Estas teorias são fundamentais para as pesquisas matemáticas de hoje.

Riesz, no Congresso Internacional de Matemática em Roma, em 1909, abordou as questões relativas aos espaços métricos e propôs uma aproximação axiomática para a topologia. Estes estudos baseavam-se em definição de pontos de limite, sem o conceito de distância. Alguns anos depois, em 1914, Hausdorff definiu o conceito de vizinhança a partir de quatro axiomas que não levam em conta as considerações métricas. Estes trabalhos de Riesz e Hausdorff permitiram obter definições dos espaços topológicos abstratos. No entanto, os conceitos de espaços topológicos abstratos também podem ser obtidos a partir da análise funcional, que aborda aspectos relacionados às físicas matemáticas e à astronomia, pois os métodos clássicos de análise eram inadequados para a observação de alguns problemas. Jacob Bernoulli e Johann Bernoulli inventaram o cálculo das variações, no qual o valor de uma integral é projetado como uma função das funções que pode ser integrada.

Schmidt, em 1907, examinou a noção de convergência em espaços e estendeu os métodos de Hilbert para as equações integráveis, utilizando para isto generalizações das séries de Fourier. Ele definiu distância como sendo um produto vetorial interno. De fato, um passo adicional em relação à abstração dos espaços foi dado por Banach em 1932, quando moveu suas idéias dos produtos vetoriais internos para espaços normatizados. E, finalizando estes conceitos históricos sobre os espaços e a topologia, vamos encontrar Poincaré, que desenvolveu estudos sobre os métodos topológicos a partir de equações diferenciais ordinárias ao estudar problemas de astronomia.

Hoje, definido como *"a estrutura global da totalidade dos objetos que estão sendo considerados"* (Costa 1996: 113), ampliamos significativamente os estudos sobre problemas topológicos. Vamos encontrar, em matemática, estudos sobre os espaços dos polinômios, os espaços das funções automorfas, o espaço das fases, os espaços métricos, os espaços projetivos, os espaços topológicos, enfim, uma infinidade de campos de conhecimento, às vezes próximos da geometria, outras vezes próximo da álgebra e da lógica, criando verdadeiras redes de conexão entre os segmentos de estudo da matemática.

O desenvolvimento histórico da geometria, hoje totalmente inserido nos estudos de topologia, mostra-nos que a lógica toma conta desta ciência como praticamente de todas as áreas da ciência matemática. Voltemos aos trabalhos desenvolvidos por Newton C. A. Costa, sobre *a lógica paraconsistente*. Para ele, de modo técnico, uma teoria formal qualquer, em cuja linguagem aparece um símbolo para negação, é *inconsistente* se existe uma fórmula tal que ela e sua negação são deriváveis na teoria. A lógica é paraconsistente, nome dado aos pensamentos formulados por este autor, se pode ser usada como lógica subjacente, isto é, que não se manifesta e está subentendida a teorias inconsistentes mas não triviais. Ele entende por teoria trivial aquela na qual todas as fórmulas estabelecidas por uma linguagem são deriváveis da própria teoria. Em outras palavras,

> *"A questão colocada por tais lógicos é a seguinte: como construir sistemas que sirvam como lógica subjacente a teorias que admitam contradições sem serem triviais. ... Enquanto a lógica paraconsistente insurge-se contra o princípio de não-contradição, a lógica intuicionista rejeita um outro princípio da lógica clássica, o princípio do terceiro excluído. Sistemas intuicionistas visam capturar as idéias das considerações de natureza filosófica de L.E. Brouwer"* (Queiroz 1998: 1).

5. POR UMA SEMIÓTICA DA ESCRITA MATEMÁTICA

A linguagem é fundamental na concepção do raciocínio humano. De fato, não existe pensamento sem linguagem, construímos e somos construídos por ela. Peirce, em sua classificação das ciências, define semiótica ou lógica como sendo a ciência que estuda toda e qualquer linguagem (Santaella 1983: 10) e, segundo ele, a lógica pode ser classificada através dos processos de inferência abdutivo, indutivo e dedutivo.

Newton Costa, assim como Peirce, acredita que o homem está em busca das verdades nas ciências. Os dois crêem que as verdades são de caráter epistemológico, ou seja, são relativas aos sistemas que a concebem e, mais que isto, acreditam que devemos estar preocupados em encontrar um método dos métodos. Costa afirma que existem diversas verdades, cada qual associada a um sistema que, por sua vez, está associado a uma lógica que melhor se adapte a ele. De fato, pensamento, linguagem e lógica estão definitivamente associados entre si.

Ao estudar o conhecimento científico, Costa afirma que existem, pelo menos, três teorias da verdade: a *teoria da correspondência*, na forma que A. Tarski a concebeu, a *da coerência*, de alguma maneira defendida por G. Hegel, B. Bosanquet, F. Bradley e H. Joachim e por alguns membros do Círculo de Viena, como O. Neurath e H. Hahn e *a* *pragmática* de C. S. Peirce, W. James e J. Dewey (Abe 1991). Costa ainda acrescenta que cada uma das teorias da verdade possui um tipo de lógica subjacente. E, para ele,

> *"Os princípios lógicos refletem, sob certos aspectos, as leis que regem o exercício da razão. Praticamente, não há atividade lógico-racional sem o veículo lingüístico. Raciocínios muito simples, como, por exemplo, algumas inferências imediatas, aparentemente podem ser feitos sem se recorrer, de modo sistemático, ao aparato da linguagem. Porém, os resultados acabados e finais da razão materializam-se, como já vimos, em contextos lingüísticos. Assim sendo, as leis lógicas terminam por ser caracterizadas por meio da linguagem. Se quisermos estudar os princípios da razão, espelhados pelos princípios lógicos, torna-se imprescindível, pois, tratarmos de alguns aspectos básicos da teoria da linguagem"* (Costa 1980: 23).

Com isso, notamos que o homem estrutura seu pensamento de forma lógica. E, por outro lado, como todas as linguagens são sistemas sígnicos organizados logicamente através de um conjunto complexo de representações. Podemos dizer que a matemática, que é considerada como uma ciência de mesma natureza que a lógica, mostra a sua estrutura enquanto linguagem, expondo-se como forma de organização do pensamento humano. Ao longo do tempo, ela vem sendo construída baseada substancialmente nos desenhos, gráficos, diagramas, rabiscos, anotações, textos, artigos, enfim, nas linguagens visuais e escritas. A primeira, a visualidade, que já analisamos são formas sígnicas icônicas, segundo a teoria peirceana. Ela deve ser percebida em primeiridade e são ícones que são imagens. Já, em segundidade, observamos a linguagem matemática escrita através de seus níveis lingüísticos e, segundo Peirce, podemos dizer que seus signos são *diagramas*.

Então vamos observar melhor está forma de organização do pensamento matemático. A linearidade, característica da linguagem escrita, é transferida para essa forma lógica de organização dos códigos, que, em primeira instância, parecem ser simbólicos. Neste momento, cabe destacarmos que: estas duas formas de representação, a visual e a escrita, devem ser consideradas junto com outros meios de comunicação formais e informais que nos ajudam a formular o pensamento como um todo. Devemos levar em consideração aquilo que se gesticula, fala-se, ouve-se e sente-se, enfim, uma infinidade de modos de percepção quando se produz matemática. Contudo, neste trabalho, focaremos nossa atenção apenas nas formas de linguagem que, no nosso modo de ver, preponderantemente, determinam a elaboração do raciocínio matemático, ou seja, a visualidade, que já analisamos no capítulo anterior, e a escrita, que deve ser associada à natureza do pensamento matemático.

Não podemos deixar de considerar que tanto uma quanto a outra forma de observação matemática se desenvolvem inserida nos contextos históricos de cada momento. E é exatamente assim que a observaremos no quinto capítulo deste trabalho. Realizaremos uma discussão pragmática do discurso matemático, pois, de acordo com Costa, quando tratamos da ciência em geral, estamos a tratar das idealizações, e

> *"Jamais se deve esquecer que ela se desenvolve no decurso da história e que o esquema lógico anterior apenas nos fornece visão esquemática do conhecimento em determinado momento. Porém, semelhante esquema se mostra importante para se entender o espírito da empreitada científica; no transcurso da exposição teremos de modificá-lo, não obstante o seu caráter esquemático e genérico"* (Costa 1997: 26).

Então, vamos diretamente às nossas reflexões sobre o discurso lingüístico matemático, lembrando sempre que estamos olhando para uma única forma de organização da linguagem matemática escrita, isto é, devemos frisar que existem várias formas semânticas de organização do signo matemático. Não nos deteremos na análise de todas elas, pois não é o foco deste texto. Vamos observar um modo de organização da representação lingüística matemática, segundo a percepção peirceana.

5.1 A linguagem matemática e o discurso lingüístico

Comecemos olhando um texto matemático qualquer. Ele certamente está vinculado a um complexo sistema lingüístico em que se misturam palavras, frases e locuções tiradas da linguagem natural escrita e falada e que, unidas aos símbolos, figuras, esquemas e diagramas de modo geral, elaboram o conhecimento matemático. De fato, notamos que este conjunto de signos, ao se estruturar, possui características similares às da linguagem escrita. Nele podemos encontrar frases do tipo: o número x é primo; dois pontos determinam uma única reta; a derivada de x é x'; enfim, frases completas com relação ao nível lingüístico, com sujeito e predicado.

Para elaborar esta discussão, devemos observar o trabalho de Brian Rotman em *"Toward a semiotics of mathematics"* (1988). Ele buscou responder qual é a natureza da linguagem matemática. E, para formalizar seu pensamento, ele identificou quais são os sujeitos que participam do processo de construção deste tipo de raciocínio. Para tanto, começou por listar os elementos que compõem este discurso, que são: os números, os pontos, as retas, as funções, as relações, os espaços, as ordenações, os grupos, os limites, os morfismos, os operadores e muitos mais. A partir disto, no âmbito da linguagem escrita, o autor demonstrou que os signos que compõem as frases matemáticas estão associados às regras, conceitos e leis relativas à linguagem escrita.

Para Rotman (1988: 8), a matemática é construída por instruções que determinam ação e que, se executadas, indicam comandos, ordens e afirmativas a serem obedecidas. Como exemplo, podemos citar os seguintes enunciados: prove o teorema t, subtraia x de y, determine a reta r perpendicular ao ponto P sobre a reta s, conte os elementos do conjunto S e considere um polígono P arbitrário com um número x de lados. As atividades matemáticas podem ser explicitadas através dos verbos adicionar, multiplicar, exibir, encontrar, enumerar, mostrar, computar, demonstrar, definir, eliminar, listar, desenhar, completar, conectar, determinar, avaliar, integrar, especificar, diferenciar, integrar, ordenar, completar, calcular, construir, etc., assim, os textos matemáticos parecem ser uma série de instruções sucessivas e operativas escritas, no sentido de determinar a construção de algo.

Se olharmos mais atentamente para este tipo de código, vamos perceber que a matemática é muito mais complexa que isto, e as ações indicadas nesta incompleta lista de verbos, significativamente diferentes entre si, não retratam todo o universo matemático. E, de acordo com Rotman, os processos de codificação desta linguagem dependem do contexto e do domínio da aplicação a que estão sujeitos, isto é, dependem se são desenvolvidos na álgebra, no cálculo, na aritmética, na lógica ou na topologia. Para ele, estes signos

> *"exibem diferenças radicais em âmbito, em fecundidade, em complexidade, e em caráter lógico: alguns, como 'adicionar' poderiam ser finitamente determinados, outros, como 'integrar' dependem essencialmente de um processo infinito de elaboração; alguns como 'contar' são aplicáveis apenas em uma coleção determinada de elementos, outros já são aplicáveis em funções, ou relações, ou diagramas, ainda outros, como 'exibir', são aplicáveis a qualquer entidade matemática; e, por fim, encontramos alguns que podem ser considerados repetidas vezes nos estados ou entidades que eles produzem, outros não podem"* (Rotman 1988: 8).

Procurar estas diferenças nos levaria a um conhecimento matemático muito técnico e específico que não estaria em nossa proposta de estudo. O enfoque que pretendemos dar a este capítulo está na compreensão de como as ações e os verbos usados em matemática refletem o caráter epistemológico e as relações semióticas dos signos matemáticos relativos aos aspectos lingüísticos, e não aos significados que eles denotam.

Para melhor exemplificar o que pretendemos aqui, consideremos efetivamente o que seria o processo de raciocínio de um matemático diante de um conceito concreto. Observemos a afirmativa: *Seja dado um espaço métrico.* Ele determina que estamos operando em um espaço geométrico definido em condições específicas e introduz um determinado sistema topológico matemático que carrega consigo definições, conceitos, demonstrações, exemplos gerais e casos particulares que nos conduz a um ambiente pré-definido. Nele também devemos estar considerando a idéia de conjunto, métrica, vizinhança, ponto limite, noções de continuidade, condições de espacialidade, enfim, um conjunto de definições e conceitos atribuído a este tipo de espaço topológico matemático detalhadamente configurado.

Portanto, notamos que, ao definirem o ambiente no qual se está operando, os matemáticos imaginam mundos e ações onde suas representações definem modelos pré-determinados. Ao considerar os espaços topológicos métricos, afirmamos a existência de interpretantes matemáticos, às vezes nós mesmos. Eles elaboram imagens mentais destes ambientes e neles definem conceitos e relações capazes de executar operações possíveis apenas com estes tipos de signos, exclusivos destes lugares geométricos.

Nas palavras de Rotman, o processo de elaboração na ciência dos números é executado por três sujeitos semióticos: o Matemático, o Agente e a Pessoa, os três operando com se fosse um único sujeito quando da prática da matemática. O Matemático é aquele que escreve e indica, de maneira afirmativa, quais as ações que serão realizadas na elaboração deste discurso. Ele faz afirmativas como: considerar, definir e provar e, com isso, configura o campo de conhecimento no qual o discurso matemático será construído, isto é, o ambiente onde a ação matemática terá lugar. O segundo sujeito semiótico, o Agente, é aquele que escreve as instruções que irão efetivar este tipo de discurso. Ele executa ações do tipo: somar, contar e integrar dentro do ambiente imaginado pelo Matemático. Estas ações não são interpretadas como ações da imaginação e, portanto, não podem ser executadas pelo Matemático. Quem as executa é o Agente, que nunca é chamado para atribuir significado ao que está sendo realizado. Por último, vamos encontrar a Pessoa, que é o único que tem a capacidade de unir os outros dois. A Pessoa é chamada no momento em que o Matemático precisa dialogar com o Agente e dar consistência a todo o processo de elaboração do discurso matemático.

É o Matemático que imagina tudo aquilo que o Agente irá elaborar e, desse modo, falta-lhe a subjetividade desse primeiro diante do signo. Ao Agente é permitido elaborar a seguinte sentença: $x.y = y.x$, onde as generalizações são admissíveis. A ele também é permitido operar nas infinitudes do pensamento matemático e, deste modo, considerar o seguinte raciocínio: dados os elementos x e y pertencentes a um conjunto qualquer A e dada a operação de multiplicação, definida para estes elementos, podemos escrever que a operação é comutativa no conjunto A dado. Em linguagem matemática, sem testar exaustivamente todas as possibilidades de ocorrência deste fato, pois isto seria praticamente impossível diante da infinidade de possibilidades que podem ser assumidas, o Agente pode afirmar que: a ordem dos fatores não altera qualquer produto no conjunto A ou, ainda, que a propriedade comutativa vale para o conjunto A.

O Agente é um esquema diagramático do Matemático, afirma Rotman, portanto, é uma imagem interrompida e idealizada dele e, como tal, faz com que o assunto matemático em discussão não se complete. Então, entra em ação o terceiro sujeito semiótico, que é a Pessoa. Ele une a idealização do Matemático com a operacionalização do Agente e numa síntese de raciocínio elabora o discurso matemático uno e integral.

A entidade Pessoa surge para firmar um pacto de relacionamento entre o Matemático e o Agente, através do qual esta forma de pensamento é elaborada. A Pessoa é a única entidade semiótica que pode articular a união entre as outras duas; é ela que, em virtude de sua capacidade, pode persuadir o Matemático e o Agente a concluírem por uma demonstração ou uma prova matemática. Em cada linha da demonstração o Matemático observa e imagina pelo Agente, que, por sua vez, é persuadido a realizar uma determinada tarefa. Por outro lado, ele, o Matemático, também está sendo persuadido de algum modo pelo pensamento experimental do Agente que, através da execução de ações, leva o primeiro a confirmar a sua predição (Rotman 1988: 14).

Visto deste modo, o pensamento matemático, na visão de Rotman, está fundamentado nas três inferências de Peirce: abdução, indução e dedução. Naturalmente, como toda a teoria peirceana, também está fundamentado nas categorias universais, o Matemático em primeiridade, o Agente em segundidade e a Pessoa em terceiridade. Isto é óbvio, na medida em que o matemático Brian Rotman estrutura seu pensamento na semiótica. Sabemos também que o discurso matemático, assim como qualquer outro, não se apresenta segmentado. Na realidade, quem o elabora é um sujeito único e, neste caso, é o próprio matemático. Para justificar o aumento de complexidade e artificialidade de nossa caracterização de sujeitos semióticos, o modelo que ora analisamos tem que ser útil e introduzir novos elementos de percepção. De fato, a sua compreensão ser associada a alguma outra forma de pensamento semelhante a ele. E isto ocorre, na medida em que estes sujeitos hipotéticos semióticos de Rotman: o Matemático, o Agente e a Pessoa, unificam-se através do processo de elaboração do conhecimento matemático, e são similares à formulação de Peirce sobre a cognição humana. Por outro lado, novamente, vamos encontrar o pensamento de Santaella, para quem, de acordo com Peirce, o pensamento só,

"... pode existir como um processo contínuo. Essa continuidade se expressa nas formas das inferências válidas que são de três tipos: dedução, indução e abdução. Assim sendo, toda a ação mental, por mais informal ou errádica que pareça, sempre se conformará a uma dessas formas ou a uma mistura delas ..." (Santaella 1993: 45).

O processo cognitivo está diretamente associado aos procedimentos lógicos mentais e, como toda a linguagem, se constrói através do raciocínio lógico. Portanto, é de se esperar que os modelos que elaboramos para qualquer linguagem tenham similaridades com os meios de produzir racionais do homem. Este modelo de Rotman, na verdade, trata-se de uma concepção relacionada ao interpretante dos signos matemáticos, que também pode ser associado às imagens construídas no capítulo anterior. O Matemático que idealiza situações o faz através de imagens mentais que, como vimos, são signos ícones, que são imagens, em primeiridade, diagramas em segundidade e metáforas em terceiridade. Para esta última classificação icônica, nós estaremos dedicando o próximo capítulo inteiro, quando estivermos tratando dos paradigmas pelos quais se estruturam os signos matemáticos. Dando continuidade ao que examinávamos, o Agente que operacionaliza as idealizações do Matemático elabora seu trabalho diante da lógica indutiva que é apenas operacionalizada, e por fim, a Pessoa é a entidade semiótica que, através da inferência dedutiva, estabelece as sínteses do pensamento matemático. Este processo de elaboração, como já notamos, é contínuo e univocamente determinado pelas nossas crenças e hábitos, em um determinado momento histórico.

Dando continuidade a está reflexão, vejamos agora as características da linguagem escrita, vista por outro modo de configuração, obviamente, similar ao primeiro. Podemos dizer então que, assim como o modo de organização do pensamento, a estruturação dos textos se faz em descrição, narração e dissertação, segundo Santaella.

5.2 A descrição, narração e dissertação em matemática

Novamente remeteremos o nosso leitor às produções de Maria Lúcia Santaella, em seu livro *"Produção de Linguagem e Ideologia"*, nele podemos ver análises importantes sobre as questões lingüísticas de um modo geral, onde identificamos muitas similaridades com o que estamos abordando neste capítulo. Mais precisamente referimo-nos ao capítulo *"Por uma classificação da linguagem escrita"*, que faz uma completa abordagem dos aspectos lingüísticos do raciocínio humano. Dele extrairemos apenas as conclusões, porque o modelo de classificação dos modos que caracterizam a organização textual adotado por Santaella é baseado na teoria peirceana e já a analisamos.

A linguagem escrita pode ser classificada em: descrição, narração e dissertação e, obviamente, possui analogias com as três categorias fundamentais de Peirce.

Para Santaella, a descrição, que deve ser classificada como primeiridade,

> *"é um processo de tradução da linguagem das apreensões sensórias para a linguagem verbal. Poder-se-ia afirmar que se trata de um procedimento de transcodificação, ou seja, a linguagem verbal procura transcrever a apreensão dos fenômenos feita pelos sentidos. Todavia, o que os sentidos primeiramente apreendem são qualidades positivas dos objetos. Desse modo, a descrição seria uma tentativa de se traduzir, pelo verbal, caracteres qualitativos que os sentidos captam"* (Santaella 1996: 191).

Já a narração, que é Segundidade, pode ser definida como sendo

> *"... o universo da ação, do fazer: narr-ação. Portanto, a narrativa em linguagem verbal se caracteriza como o registro lingüístico de eventos ou situações. Mas só há ação onde existe conflito, isto é, esforço e resistência entre duas coisas: ação gera reação e dessa inter-ação germina o acontecimento, o fato, a experiência"* (Santaella 1996: 192).

E, finalmente, a dissertação, que se classifica como Terceiridade, é aquela a qual daremos maior atenção, porque é inegavelmente a natureza do discurso matemático. Ela fundamenta-se num tipo de raciocínio que observa os conceitos, estabelece as leis gerais e elabora as formulações abstratas e, segundo Santaella, nos coloca no hábitat do intelecto, onde queremos estar. Para ela, as dissertações são

" ... operações mentais que se traduzem em leis e tipos gerais, ou seja, em conceitos, as ocorrências que se repetem e que se tornam hábito. ... a dissertação é a linguagem da fórmulas genéricas e convencionais. Uma formulação genérica determina outra após ela: o significado de uma fórmula é uma fórmula subseqüente" (Santaella 1996: 193).

Resumindo estes três modos de classificação da escrita, concluímos que: a primeira, a descrição é a qualidade do que os sentimentos capturam e transformam em registros verbais; já a narrativa lida com a ação e reação e também trabalha com os registros concretos e as experiências singulares; e, por fim, a dissertação é um registro do pensamento e está diretamente relacionada com a linguagem matemática e é, também, uma expressão do intelecto. De fato, a natureza do texto matemático é dissertativa, pois opera com as formulações conceituais e teóricas através da iconicidade estabelecida pelas imagens, diagramas e metáforas matemáticas.

Depois de observarmos os argumentos de Rotman sobre os três sujeitos semióticos matemáticos e apresentar a argumentação de Santaella sobre a natureza da linguagem escrita em seus três modos de apresentação lógica que, estão intrinsecamente relacionados aos pensamentos de Peirce, somos levados à nossa classificação dos signos matemáticos pelos seus aspectos lingüísticos. Verificamos que todos os conceitos apresentados são similares.

De fato, ao observarmos estes vários pensamentos caminhando lado a lado, somos conduzidos a acreditar que nosso modelo de formulação está na direção acertada, pelo menos segundo este modelo semiótico que optamos por analisar. Como diria Peirce, não há teoria em sua totalidade que seja apresentada como algo totalmente novo, o relacionamento entre os diversos modelos de classificação e as diversas linguagens de comunicação que estamos estudando se concretiza em sistemas similares e determinados. O paradigma de percepção do momento em que vivemos dita naturalmente os parâmetros para esta unicidade que apontamos mesmo que não o identifiquemos em sua totalidade.

Para melhor compreender os pontos de similaridades entre esses pensamentos indicados em nosso trabalho e inter-relações entre eles, então vamos observá-los em detalhes. Para tal, consideremos o Matemático, o primeiro dos sujeitos semióticos de Rotman, que através de algumas afirmativas estabelece qual é o ambiente em que irá atuar, ele, na verdade, está propondo o universo de seu discurso, ou seja, o campo de domínio no qual a ação matemática terá lugar. Associado a isto, nós podemos dizer que o Matemático, ao apresentar seus postulados e axiomas, está diante de um processo de transformação, no qual as imagens mentais percebidas irão construir significados e dar sentido a um novo conhecimento, e, também, a tentativa de tradução dos sentimentos capturados pela mente de quem está a produzir matemática.

Digo que é uma tentativa, porque os axiomas e postulados são, por definição, princípios, fatos ou proposições não demonstráveis, evidentes ou não, que são admitidos como suporte para um sistema dedutível e, até que este modelo seja totalmente elaborado, ficam-se as dúvidas. Será que esta base axiomática é suficiente para a configuração do nosso sistema?

Estas premissas, chamadas de axiomas e postulados, não necessitam de demonstrações e são admitidas como universais, diante do sistema que estamos a construir. Porém, até que todo o processo de elaboração da teoria esteja completado, através dos lemas, exemplos, demonstrações e casos gerais e particulares, nós estamos diante de hipóteses e incertezas. A esse tipo de elaboração, Santaella dá o nome de *"discurso dissertativo hipotético",* e em sua classificação da linguagem escrita, é aquele que opera com o raciocínio abdutivo e, como tal, é responsável pela mera formulação de hipóteses explicativas das coisas.

Assim, em primeiridade, mas lembrando sempre que qualquer dissertação opera em um nível de terceiridade, estamos diante de nossas primeiras hipóteses e sugestões conceituais em busca da apreensão dos fatos. Os axiomas e postulados são delimitações do campo de domínio que iremos trabalhar e, como tais, são delineamentos das possíveis formulações conceituais que estamos estabelecendo enquanto premissas, a título de sugestão.

Para o matemático principiante, isto representa o desbravamento de um caminho que já foi percorrido por outros matemáticos mais experientes; uma trilha bem demarcada pelos passos de quem ali já esteve, mas cheia de surpresas e novidades para aquele que o está percebendo pela primeira vez, e é isto que salta aos olhos. Já para o matemático experiente, que está à procura de novas teorias e de novas formulações, o que importa é estabelecer a suficiência de suas premissas e verificar se elas sugerem ou não novos caminhos teóricos. Isto traz consigo a qualidade do que deve ser percebido e, assim, esse discurso hipotético torna-se um discurso categorizado por primeiridade. Ele sugere caminhos a serem percorridos, ao mesmo tempo em que se apresenta como uma regra diretamente associada à terceiridade, às leis e às condições pré-estabelecidas pelos princípios e formulações teóricas do raciocínio matemático.

Aí podemos dizer que os axiomas e postulados matemáticos, que aqui denominaremos de *descrições matemáticas*, são discursos que podem ser classificados em terceiridade junto com o *"discurso dissertativo hipotético",* quando é observado pelos níveis lingüísticos. No entanto, são considerados primeiridade, na medida em que apresentam a qualidade daquilo que está sendo observado, são quase raciocínios, responsáveis por formulação de hipóteses que deverão servir de base de sustentação do sistema que pretendemos modelar.

Tomemos um exemplo para melhor compreender este assunto. Consideremos, novamente, a geometria euclidiana e seus cinco axiomas. Eles são suficientes para definir a geometria propriamente dita. Porém, depois de aproximadamente 1.500 anos de hegemonia, este conhecimento, tido como consistente e absoluto, que abordava as concepções espaciais, transforma-se. Na tentativa de demonstração do quinto axioma, a partir dos outros primeiros, os matemáticos descobrem a existência de mais de uma geometria. E, assim, nascem as duas geometrias não-euclidianas, com novas hipóteses, conceitos e formulações que obrigaram os matemáticos a repensar boa parte de suas crenças e valores sobre estes espaços de representação.

Em busca da demonstração do quinto axioma de Euclides, Lobachevsky, Bolyai e Riemann, descobrem novos espaços métricos que serão denominados de espaços elípticos e hiperbólicos. A concepção destes novos modelos viabiliza o desenvolvimento da

Teoria da Relatividade de Albert Einstein e, assim, novas idéias surgem quando estamos a operar com os conceitos e formulações destes novos espaços, no sentido de tornar nossas demonstrações mais consistentes e coerentes. Fato semelhante acontece na teoria dos números, nos conjuntos cantorianos; ao tentarmos torná-los mais consistentes, verificamos que eles dão vida a uma nova teoria: a dos conjuntos não-cantorianos. Também na lógica este fato acontece, paradoxalmente quando estamos em busca das consistências sistêmicas, encontramos as lógicas heterodoxas: paraconsistente, difusa, enfim, diversos modelos que operam com as inconsistências dos sistemas.

Em nossa classificação dos signos, o processo de manipulação dos conceitos de uma teoria nos remete à categoria de segundidade, pois é quando, a partir de procedimentos operativos, estamos diante do segundo momento do processo de elaboração. Segundo Rotman, aquilo que é realizado pelo Agente, através do processo de experimentação, é operativo e estabelece a inferência lógica indutiva. Este segundo aspecto de raciocínio consiste em medir o grau de concordância de uma teoria com os fatos que destacamos do mundo, e mostra que os dados teóricos supostos, em abdução, pelos axiomas e postulados, podem ser comprovados, conduzindo-nos aos possíveis sistemas lógicos.

Neste momento, em nosso modelo, verificamos que o discurso matemático está em segundidade e é aquele que Santaella chamou, na linguagem dos textos, de *"discurso dissertativo relacional"*. Para melhor caracterizá-lo vamos estabelecer sua relação com o raciocínio indutivo, isto é, a categoria do pensamento do qual o *"discurso dissertativo relacional"* faz parte, e que

> *"... consiste em se partir de dados teóricos e se medir o grau de concordância da teoria com fatos concretos. A indução mostra que determinados dados teóricos (baseados em suposições) são operatórios praticamente. Trata-se pois de 'um processo de investigação experimental', ou ainda, de um método de comprovação experimental de suposições teóricas"* (Santaella 1996: 202).

Denominaremos está operacionalização dos signos descobertos pela *descrição matemática* de *narração matemática.* Ela está presente em nosso modelo quando, através da experimentação, relacionamos as predições teóricas com os fundamentos estabelecidos pelos axiomas e postulados. Nesta operacionalização das entidades matemáticas, na busca de suas comprovações e na tentativa de encontrar teoremas que demonstrem nosso raciocínio, somos conduzidos a concluir por formulações teóricas condizentes com os fatos que observamos. Os fenômenos concretos indicam os resultados e servem de base e suporte, estabelecendo nossos hábitos, para gerar as novas teorias e novos conhecimentos.

O discurso matemático é terceiridade porque registra nossas operações intelectuais. Por outro lado, podemos dizer que o matemático também opera com seu discurso em outro nível de percepção, em segundidade, quando elabora a *narração matemática.* No processo de experimentação do matemático, quando ele está atuando como Agente, sua inferência é lógica e indutiva. Em função disto, o modo de organização textual do discurso matemático é terceiridade porque trata do raciocínio, mas é segundidade quando é observado através dos signos que concretamente ele opera. A essência do diagrama é utilizada neste momento, ao explorar, de forma dialógica, os significados dos signos matemáticos e os seus elementos estruturais e conceituais, que, ao interagirem constroem o pensamento e, conseqüentemente, a própria matemática. Assim podemos dizer que, na interação entre os axiomas que determinamos como válidos no primeiro instante e os teoremas que queremos demonstrar, os matemáticos criam sua linguagem e seus pensamentos.

Um belo exemplo de dedicação dos matemáticos no sentido de encontrar suas verdades, está no livro "A Experiência Matemática" de Philips J. Davis e Reuben Hersh que, ao descreverem os acontecimentos que levaram os matemáticos à descoberta dos espaços topológicos não-euclidianos, relatam que muitos deles fizeram contribuições importantíssimas para os estudos nesta área da geometria, entre eles destacamos Gauss, Lobachevsky, Bolyai e Riemann. Sobre o trabalho de Bolyai, na solução do problema do quinto axioma e das descobertas sobre a geometrias não-euclidianas, Davis afirma, que

> *"A descoberta foi acompanhada de muitas compreensões falsas, dúvidas e hesitações. Parecia estar à borda da loucura. As dores do parto foram agudas. Assim, por exemplo, o pai de Bolyai escreveu-lhe: "Pelo amor de Deus, por favor, desista. Tema-a tanto quanto as paixões sensuais, pois*

> *ela, também, poderá consumir todo o seu tempo e roubar-lhe a saúde, a paz de espírito e a felicidade na vida"* (Davis 1989: 254).

Encontramos, nesta súplica, o Agente em árdua atividade interagindo com o Matemático e não conseguindo encontrar uma síntese de pensamento que o levasse a elaborar, através da Pessoa, a demonstração do axioma das paralelas. Resta-nos uma pergunta: o que levaria um homem a desejar algo tão profundamente e tão intensamente, a ponto de abdicar de sua vida pela descoberta de um conhecimento. E de fato, a resposta nos é dada pelo pai de Bolyai quando compara essa busca da demonstração do quinto axioma como uma paixão avassaladora. O prazer do ato criativo é momentâneo, pois ele é um "insight", algo que brilha aos nossos olhos, porém, a dor da procura e da pesquisa é que torna este prazer tão intenso.

Justus Buchler afirma que o ato de conhecer ou desejar adquirir conhecimento é intrínseco ao homem, e nos faz perceber que o pensamento matemático é exatamente igual quando estamos a pensar em qualquer tipo de elaboração de conhecimento. E, assim, como ele, partindo dos pensamentos de Peirce, concluímos que a elaboração de conhecimento

> *"é uma experiência familiar a todo ser humano e desejar algo totalmente, além dos significados presentes nele, é seguir esse desejo perguntando: eu deveria desejar essa coisa em si, se tenho amplas possibilidades de dar significados a ela? Para responder a essa pergunta, ele procurou o coração e desse modo, fez o que consideramos uma observação abstrata. Ele fez em sua imaginação um pequeno diagrama esquemático, ou esboço do esboço, considerando que modificações do estado hipotético das coisas exigiriam fazer um desenho, e então examinou isto, quer dizer, observou o que ele havia imaginado e viu se esse desejo era tão ardente para conhecer. Por tal processo, que está muito no fundo da ação do matemático, nós podemos chegar a conclusões que seria verdade para todos os signos e em todos os casos"* (1940: 98).

Esta é uma brilhante descrição do modo de raciocinar humano, particularizado na forma de elaboração do conhecimento matemático. Verificamos que, a partir de uma imagem mental, que se corporifica em uma imagem real e, em seguida, num diagrama matemático que pode ser testado, buscamos uma determinada verdade que são seus teoremas, verdades estas muitas vezes inatingíveis, como por exemplo a proposta de Hilbert de consistência da matemática. Assim, através do método de investigação científica geramos ações e signos, num processo de semiose infinito, e na medida em que desejamos essa coisa em si, e damos amplas possibilidades de significação a ela, estamos caminhando através do processo de significação; do processo de cognição humana.

O raciocínio matemático em si, aquele que fica como registro da história, constrói-se a partir da elaboração e desenvolvimento dos lemas, demonstrações e teoremas na matemática. Este tipo de formulação discursiva encontra-se relacionada aos mecanismos do raciocínio dedutivo de Peirce, ou do raciocínio matemático, que é fundamental na configuração do terceiro sujeito semiótico de Rotman, a *Pessoa.* Obviamente ele está relacionado ao *discurso dissertativo argumentativo* de Lúcia Santaella, porque a dedução lida com as certezas e somente se relaciona com os objetos gerais, já que os particulares operam no campo da individualidade, onde as conclusões necessárias não são possíveis.

Como já dissemos, é aqui que vamos encontrar a essência do discurso matemático e aquilo que ele tem de terceiridade. As demonstrações e os lemas na ciência dos números, que nós denominaremos de *dissertações matemáticas,* provam que algo deve ser. E de fato, associado à dedução, o *discurso dissertativo matemático* inicia-se em premissas e formulações hipotéticas levando-nos às conclusões dos fatos.

> *"Na dedução partimos de um estado de coisas hipotético, definido abstratamente por certas características. Entre as características que não se dá atenção neste tipo de raciocínio está a conformidade do estado de coisas com o mundo exterior (...). A inferência é válida se e somente se existe uma relação entre o estado de coisas suposto nas premissas e o da conclusão"* (Peirce 1983: 50).

A *dissertação matemática* possui características conclusivas e produz no receptor a convicção de que a conclusão é válida a partir de premissas pré-determinadas. Sendo assim, ela é um método de predição dos fenômenos, e como trabalha com dados da certeza e parte de premissas que carregam em si relações fundamentais, leva-nos às conclusões necessárias.

Após ter definido os três tipos lógicos de inferências aos quais o homem está sujeito, e tê-los relacionado aos sujeitos semióticos matemáticos de Rotman e à classificação dos modos de organização dos textos de Santaella, destacaremos uma característica que nos parece fundamental para a compreensão da relação entre os teoremas e as imagens geradas para a matemática, qual seja, o caráter diagramático desses signos que é o foco do nosso trabalho e abordaremos com toda a profundidade necessária no próximo capítulo.

Para Peirce, a expressão abstrata e a imagem são criações do raciocínio lógico humano, segundo algum propósito, e esse propósito sendo geral, somente pode ser pensado em termos gerais ou como abstrato. Elas são elementos do tratamento matemático e não existe um terceiro elemento que ambas representem. Assim, de algum modo, a imagem representa ou traduz a linguagem abstrata, e esta, por sua vez, também representa ou é uma tradução das imagens. Elas não são relativas aos fenômenos da experiência e algumas vezes fazem parte do mundo da imaginação que, por sua vez, também não pertence ao mundo da experiência. Olhando para este exemplo de Peirce encontramos os aspectos que pretendemos realçar neste momento, isto é,

> *"quando um geômetra desenha uma linha reta em um diagrama, ele entende, sem qualquer restrição, que ela representa qualquer linha reta do universo. O universo imaginário das partes, ao qual todas as imagens e todas as proposições abstrata se referem, são sempre pensadas de maneira individualmente singular representando a totalidade dessas partes"* (Peirce 1976: 300).

Assim, um diagrama ou uma imagem esquemática são signos que incorporam predicados gerais e estes são construídos a partir da observação destes signos, que, segundo Peirce, são ícones. Um teorema é uma conclusão necessária que nos remete à construção de um diagrama que, por sua vez, está de acordo com uma regra geral. Em seguida, ele pode indicar certas relações que subsistem para todos os casos e, assim, as proposições iniciais transformam-se em condições gerais. Um teorema normalmente começa com atributos de diagrama, em seguida, transforma-se em um enunciado geral para, em terceiro lugar, colocar-se como uma tese que indica um estado suficiente no qual uma verdade se mostrará diagramática. Porém, este processo não acaba aí, e, deste modo, ele transforma-se em uma construção subsidiária pela qual o diagrama será modificado, de alguma maneira, mostrando que algo é possível. E, por fim, e como quinto passo, ele transforma-se em uma demonstração que localiza as razões pelas quais uma certa relação sempre subsiste entre as partes do diagrama. A partir daí, ele pode ser exposto, mostrando tudo aquilo que é necessário ser mostrado e demonstrado; ele deve ser chamado de teorema.

Esse processo de construção pelo qual passa o teorema até se transformar em uma demonstração consistente oscila entre o estado de ser imagem, depois ser diagrama e o estado de ser proposição abstrata. E é dessa forma que, a partir de agora, queremos observar as *imagens matemáticas.* Elas são signos que, ora são proposições abstratas e indicam preceitos gerais, ora são imagens diagramáticas que nos indicam novas qualidades, que no futuro podem se transformar em regras e determinar outros princípios e conceitos gerais.

6. POR UMA SEMIÓTICA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Abordaremos neste terceiro momento a semiose dos signos matemáticos, suas possibilidades de interpretação a partir dos paradigmas que elas produzem. Comecemos por observar como seria um pensamento matemático qualquer. Este tipo de reflexão tem início ao idealizarmos algum mundo determinado. Todo o raciocínio matemático começa por afirmar a existência de um ambiente no qual ele terá lugar. Como exemplo, *“seja a linguagem L”,* no campo da lógica, nas ciências formais ou, ainda, *“sejam os mercados competitivos M_c”*, em mercadologia, nas ciências empíricas. Com estas duas afirmações estamos a delimitar o campo de atuação, no qual se dará a ação matemática, e o que ele vai examinar, considerar, analisar, isto é, quais os aspectos que deverão ser realçados neste mundo metaforicamente concebido. O matemático estará criando as suas *imagens mentais* e *imagens matemáticas,* de modo a construir um campo de atuação, através de uma determinada linguagem, estabelecendo uma interpretação particular. Os sistemas criados consistentes ou não, ganharam vida própria ao serem analisados através das diversas possibilidades de interpretações semióticas.

No primeiro caso, a letra “*L*“ está no lugar do mundo imaginado e, assim, estamos atuando sobre estudos das ciências formais, na linguagem matemática e na lógica. No segundo, estamos nas ciências empíricas, observando a economia e suas formas de representação, mais especificamente no campo de atuação dos mercados econômicos competitivos, onde o mundo imaginado é representado pelo signo “M_c“. Os signos “*L*“ e “M_c“ substituem sistemas que são metáforas que, por sua vez, constróem e são construídos para representar os objetos concebidos de maneira abstrata ou não.

Em razão disto, podemos dizer que observamos um modelo, que diante de um procedimento metafórico se adapta ao pensamento de quem vai considerar, operacionalizar e analisar estes mundos imaginados. Aqui as situações imaginadas estão previamente determinadas pelos axiomas e postulados e nos levam a conclusões necessárias. Ao afirmar que existe um campo de atuação no qual o processo de interpretação matemático tem lugar, deve-se considerar que estamos diante de uma rede de metáforas, nas quais realmente nos conectamos e passamos a criar, elaborando o raciocínio matemático e podendo refletir sobre ele. O processo de produção nesta ciência é realizado com metáforas que nos fazem perceber mundos, imaginar ações e organizá-las de algum modo lógico, segundo uma série de axiomas e construindo um sistema qualquer. E assim, o processo semiótico de realização do conhecimento matemático está em plena execução.

Segundo Rotman (1988), alguém imagina mundos e alguém executa ações imaginadas a caminho de alguma verdade previamente estabelecida. Nos conceitos elaborados por ele, a partir de seu texto que já comentamos, o Matemático imagina para que o Agente possa operacionalizar estas ações imaginadas, construindo o raciocínio matemático. A Pessoa, que é o terceiro sujeito semiótico, elabora uma síntese entre os dois primeiros produzindo o conhecimento matemático em si. Para ele, ainda, através deste processo, o pensamento se realiza, obviamente, associado às possibilidades de semiose produzidas pelos signos.

Segundo Justus Buchler (1940), Peirce afirma que o ato de conhecer ou desejar adquirir conhecimento é intrínseco ao homem, e nos mostra que o pensamento matemático é exatamente igual a qualquer tipo de raciocínio na elaboração de conhecimento. Ele acredita que uma experiência familiar a todo ser humano é desejar algo e ir além dos significados contidos nele. Afirma também, que querer algo é dar amplas possibilidades de significação a ele, e, para isto, nós devemos sempre procurar o coração e elaborar uma observação abstrata. O processo semiótico tem início na imaginação de diagramas esquemáticos, e diante de um intenso desejo em se conhecer, elaboramos esquemas que modificam indutivamente nossas hipóteses através de desenhos e de imagens, para, finalmente, chegar às conclusões *"verdadeiras"* para todos os signos e para todos os casos (Rotman 1990: 11), e, ainda, segundo Costa (1997), diante de uma lógica subjacente ao modelo. Estamos diante de uma descrição de como se processa o raciocínio humano, particularizado no conhecimento matemático. Verificamos que, a partir de uma *imagem mental*, corporificada na *imagem* de um diagrama matemático que deve ser experienciado, encontramos verdades pragmáticas, intensamente desejadas, mais muitas vezes inatingíveis.

O ato de imaginar mundos é uma forma de representar por metáforas. O nosso enfoque, neste momento, é o que envolve investimentos ideológicos e simbólicos na matemática. Estamos analisando as características pragmáticas deste tipo de conhecimento, conseqüentemente, estamos olhando para os diversos paradigmas de percepção que estão sendo construídos, eles são metáforas que definem as entidades matemáticas, onde depositamos os nossos pensamentos. Neste capítulo pretendemos olhar histórica e metaforicamente *as imagens matemáticas.*

Hoje, um consenso sobre uma classificação que reúna as várias linhas de pensamento dos matemáticos parece-nos impossível e complexa de ser elaborada, na medida em que as diversas estruturas construídas sobre este objeto de estudo possuem significados antagônicos e muitas vezes inconciliáveis. Porém, os paradigmas gerados pelos sistemas axiomáticos, identificados no interior da linguagem matemática, podem ser classificados por três vertentes de pensamento que não são as únicas, mas unificam este conhecimento, segundo o paradigma *pragmaticista peirceano.*

Antes de entrarmos propriamente nesta discussão, cabe um comentário sobre o que pensava Peirce. Dado o uso desvirtuado do seu conceito de *pragmatismo*, ele resolveu denominar sua teoria de *pragmaticista,* para diferenciá-la dos outros pensadores associados a ele, inclusive do pensamento de seu amigo Willian James. A semiótica, que é uma teoria da significação, objetivação e interpretação, está apta a fornecer subsídios para que possamos compreender a natureza do processo comunicacional dos fenômenos humanos ou de todos os seres vivos (Santaella 1993: 14; Anderson *et. al.* 1998). A extensão do pragmatismo de Peirce permite estabelecer princípios de continuidade entre a mente e a matéria. Ele é *"um método para descobrir métodos",* e é também uma teoria de análise lógica em busca da verdade. Porém, o que devemos destacar é exatamente este método de investigação científica que nos conduz às "*verdades pragmáticas"*, que encontramos denominadas de *"quase-verdades"* em N. C. A. Costa, R. Chuaqui, I. Mikenberge e S. French (Abe 1991: 161).

> *"Para satisfazer nossas dúvidas, é necessário encontrarmos um método através do qual nossas convicções não tenham nenhuma causa humana, mas por qualquer motivo permaneçam externas - através do qual nosso pensamento não tem nenhum efeito... este é o método da ciência. Sua hipótese fundamental, em uma linguagem comum, afirma que: existem coisas reais cujos caracteres são completamente independentes de nossas opiniões sobre eles; essas realidades afetam nossas sensações de acordo com leis regulares, e, de fato nossas sensações são tão diferentes quanto nossas relações com os objetos, contudo, tirando proveito das leis de percepção, nós podemos averiguar os argumentos de como as coisas realmente são; para qualquer homem. Se ele tem experiência e argumento suficientes e sobre elas, será conduzido a uma conclusão verdadeira"* (CP 5.384).

Uma das características do momento em que vivemos é a multiplicidade de modos de percepções que encontramos, que hoje estão ampliados pelos meios de produção de linguagem e sustentados, entre outras coisas, pela lógica da programação linear ou não-linear das novas mídias eletrônicas. Gostaríamos de destacar o trabalho de Paulo Laurentiz e seu conceito de *"representação branda"* (1991: 131), no livro *"a holarquia do pensamento artístico"*, e a tese de doutorado de Silvia Laurentiz, denominada *"imagens animadas"* (1999), que analisa, entre outras coisas, os trabalhos de Paulo e mostra como observar as imagens produzidas nos espaços topológicos de representação estáticos e dinâmicos, através da teoria semiótica e de suas possibilidades poéticas sustentadas nas formas de produção.

Por estes aspectos, estamos convencidos que o grande objetivo deste trabalho é justamente aumentar os níveis de complexidade da interpretação do pensamento matemático elaborado a partir das *imagens matemáticas* e, muito especialmente, observar as imagens produzidas no contexto tecnológico. Pretendemos compreender, através da lógica das *"representações brandas"*, como podemos estar construindo os modelos matemáticos que, podem ser percebidos por suas visualidades e sua capacidade de representar estética e poeticamente. Em seguida, devem ser transformados, através do processo de experimentação, em teorias científicas sustentadas no modo dialógico e diagramático deste tipo de pensamento.

Devemos notar que os três aspectos classificatórios que propusemos no início deste projeto: os relativos às imagens, à escrita e às ideologias matemáticas, apesar de serem considerados separadamente, na linearidade de nosso texto, não podem assim ser considerados. Em nossa conclusão final eles são componentes de um processo semiótico, portanto, totalmente conectados formando a totalidade deste nosso pensamento. O que não poderia ser diferente, diante da fundamentação lógica que adotamos para este trabalho.

6.1. Situando nosso modelo no tempo

A partir de nossa dissertação de mestrado constatamos que cada período histórico traz consigo significados e percepções diferentes, fundamentadas em paradigmas definidos. Porém, entre outras coisas, verificamos que os signos produzidos em um determinado momento histórico carregam consigo as características do período em que foi concebido. Os paradigmas e os meios de produção de cada momento histórico estão intimamente relacionados.

Ao longo da história da cultura ocidental, a matemática tem sido formulada a partir de dois objetos de estudo similares, com características diferenciadas. De um lado encontramos a Geometria que observa o signo matemático pelas suas representações acerca da natureza do espaço, e de outro encontramos a Matemática dos Números, como iremos denominar a Aritmética, a Álgebra, o Cálculo Integral e Diferencial, a Teoria dos Números e outros ramos do conhecimento matemático, que estudam os signos como coleções de elementos que possuem regras, propriedades e leis, e nos ajudam, fundamentalmente, a calcular. A matemática e a filosofia da matemática têm suas raízes na antiga Grécia. Para esta cultura, a geometria era sinônimo desta ciência e as filosofias de Platão e de Aristóteles, eram relativas a este conhecimento.

> *"Os gregos trataram, em verdade, dos problemas numéricos, dando-lhes, entretanto, interpretações geométricas; em outras palavras, ao cogitarem de uma questão acerca da grandeza comparativa de dois números, os gregos tratariam do problema como se fora um problema sobre os comprimentos de duas linhas ou das áreas de duas figuras. Os babilônios, os hindus e árabes, contudo, introduziram, gradualmente, símbolos e regras de cálculo que tornaram possível tratar das questões numéricas de um modo mais abstrato e eficiente do que era viável para os gregos. Os babilônios, hindus e árabes, não obstante, como era típico na matemática oriental, não se preocupavam muito com demonstrações nem com a organização de seus conhecimentos acerca dos números, de modo a colocá-los em forma axiomática"* (Barker: 1969, 77).

Stephen F. Barker, em *"Filosofia da Matemática"* (1969), constata que há muito tempo esta ciência vem sendo estudada pelos homens através da geometria e dos fundamentos dos números. Porém, sabemos também que estes dois ramos do conhecimento matemático, hoje, não dão conta da extensão e da complexidade que se tornou esta ciência. Resumidamente, vamos observar o desenvolvimento destes dois tipos de raciocínios e deles extrair o que acreditamos ser uma das questões primordiais para o entendimento de nossa proposta. Para nós, a axiomatização dos modelos matemáticos e o seu processo de construção e de estruturação através dos lemas e dos teoremas, definindo um sistema estruturado, é o próprio caminho da investigação matemática.

Segundo Solomon Marcus (1997), ao longo da história da cognição humana tivemos que enfrentar vários momentos de choques em relação aos nossos paradigmas de percepção. Cada um deles parecia decisivo em relação a algum aspecto, mas, em última instância, o ser humano teve sucesso e adaptou-se a todos eles. Fizemos deste processo de investigação e de solução de problemas um hábito. A cada situação apresentada o homem prosperou e transformou-se e estes novos conhecimentos modificaram-se, e a nossa criatividade foi fundamental para solucioná-los.

Nosso interesse está a partir do terceiro choque cognitivo que tivemos que enfrentar. Segundo Marcus, os dois primeiros são sobre os aspectos gerais do conhecimento humano. O primeiro está relacionado ao aparecimento e o desenvolvimento da linguagem do homem propriamente dita, o segundo é relativo à nossa forma de cognição, passamos de um modo de observação espontânea do mundo para uma fase de conhecimento experimental. Como exemplo, ele cita a matemática babilônica que no início teve um período de observação pura e simples e em seguida uma aproximação empírico-experimental. Já o terceiro choque está associado ao mundo grego e foi identificado no campo da demonstração lógica, em forma de um teorema. O conhecido Teorema de Pitágoras, empiricamente demonstrado pela matemática babilônica, mostrou a possibilidade de passarmos da hipótese para a certeza, da aproximação para a precisão, do finito para o infinito. E através da geometria de Euclides o processo de demonstração de teoremas, principalmente na matemática, permaneceu como sendo o símbolo de uma revolução cognitiva do ser humano (Marcus, 1993: 1).

Então comecemos, esquematicamente, na historia da ciência matemática e olhemos para a geometria, que desde do século 300 AC, já possuía uma estrutura configurada na forma axiomática, como já vimos. O sistema geométrico de Euclides foi considerado, por muitos estudiosos, como sendo uma forma de organização do pensamento que observava o mundo físico, ou melhor, um tipo de raciocínio formulado sobre os signos espaciais. A geometria euclidiana foi o primeiro sistema completamente organizado por princípios axiomáticos.

> *"Para Platão, a missão da filosofia era descobrir o conhecimento verdadeiro por trás do véu da opinião e da aparência, das mudanças e ilusões do mundo temporal. Nesta missão, a matemática tinha um papel central, pois o conhecimento matemático era um exemplo notável de conhecimen-*

to independente da experiência dos sentidos, conhecimentos das verdades eternas e necessárias... A concepção de Platão da geometria era um elemento chave em sua concepção do mundo. A geometria desempenhou um papel semelhante para os filósofos racionalistas Spinoza, Descartes e Leibnitz. Como Platão, os racionalistas consideravam a faculdade da razão como um traço inato da mente humana, pelo qual as verdades podiam ser percebidas a priori independentes da observação". (Davis, 1985: 366-7).

Desde que a filosofia começou entre os gregos os problemas sobre o significado, a verdade, a realidade e o conhecimento vêm sendo discutidos. Já, na geometria e também na matemática, acreditava-se que o ponto de partida era a verdade evidente, em si mesma e que deveríamos prosseguir com os raciocínios até descobrir as verdades ocultas. No caso da geometria, a verdade era como objeto formal e ideal cuja existência era evidente à mente. Duvidar desta existência seria sinal de ignorância ou de insanidade. (Davis, 1985: 367-8).

Foi então que Marcus nos apresentou o quarto choque cognitivo que, por sua vez, está relacionado ao século XVII e a noção moderna de ciência. A partir de Newton, não podemos mais aceitar a linguagem científica associada à linguagem ordinária, isto é, devemos considerar a existência de uma separação entre o uso espontâneo da linguagem ordinária e o uso da linguagem científica. A necessidade crescente do rigor e da precisão na comunicação científica deixa de lado a imprecisão e as inconsistências da linguagem comum.

O quinto choque cognitivo que irá nos interessar definitivamente, é novamente um choque que destaca as questões lógicas, ele está relacionado à descoberta das geometrias não-euclidianas que também já analisamos neste trabalho. A ciência moderna foi obrigada a transgredir as fundamentações lógicas de Aristóteles, baseadas nos princípios da identidade. O quinto postulado de Euclides não foi provado nem como verdadeiro nem como falso, na verdade se descobriu um novo campo de conhecimento matemático, as geometrias não-euclidianas (Marcus 1997: 2). Elas foram anunciadas em 1829, por Lobachevsky e, concomitantemente, por Bolyai e Gauss. Outro choque quase que imediatamente após este, em 1847, com a mesma característica lógica, foi atribuído a George Boole quando ele publicou a sua análise matemática lógica. Um importante acontecimento para as ciências cognitivas de hoje foi à tentativa de se unificar quatro conhecimentos básicos: linguagem (linguagem natural), álgebra (em sua sensação elementar), lógica (lógica proposicional) e pensamento humano.

Boole teve completo sucesso ao unificar lógica proposicional e álgebra, quando reduziu a álgebra a um caso binário, e também teve sucesso quando unificou a lógica proposicional e a manipulou, conceitualizando-a através da teoria das séries. A álgebra booleana é um dos caminhos para unificar os três aspectos básicos de cognição humana, é uma fonte essencial para as ciências contemporâneas da informação e da computação. Para ele, o ato de computar pode ser uma operação puramente qualitativa com símbolos lógicos, em contraste com a visão tradicional de computação que a admite como uma avaliação quantitativa que lida obrigatoriamente com números.

A partir daí, os conceitos lógicos em toda a matemática e conseqüentemente na filosofia da matemática foram os temas centrais dos textos matemáticos amplamente discutidos pelos teóricos e filósofos. Isto ocorreu por volta do final do século XVIII, na época em que viveu Peirce. Hoje, encontramos três grandes programas filosóficos de percepção que norteiam a ciência dos números: o formalismo, o platonismo e o intuicionismo que permitem que sintetizemos os pensamentos matemáticos contemporâneos. Percebemos que, a partir dos níveis lógicos das fundamentações peirceanas as outras correntes do pensamento matemático como o nominalismo, o conceitualismo, o realismo, o positivismo lógico, o concretismo, o logicismo, e o holismo, enfim, todas as outras formas de conceber a matemática, se adequam a estes três modelos ou de alguma forma são semelhantes a eles.

Considerando a amplitude de nossa proposta, não pretendemos, com este capítulo, fazer uma revisão histórica de todos os pensamentos e ideologias de concepção do signo matemático, nem tratá-la em toda sua extensão. Na verdade, ao analisarmos estes diferentes paradigmas de percepção matemáticos, estamos apresentando fundamentos que são unificados na teoria peirceana, sustentando o nosso projeto de uma análise semiótica dos signos matemáticos estruturados pela metodêutica peirceana, que é um *"mé-*

todo dos métodos". Em *"Sinopse parcial para um proposto trabalho de lógica"* em 1902, Peirce dizia da metodêutica:

> *"Atualmente, apenas os métodos podem fortemente chamar a atenção; e eles têm vindo em tal quantidade que o próximo passo será certamente encontrar um método para descobrir métodos. Isto só poderá vir de uma teoria do método da descoberta. A fim de cobrir todas as possibilidades, isso deveria estar fundado numa doutrina geral dos métodos para se atingir propósitos em geral; e isto, por sua vez deveria vir de uma doutrina ainda mais geral da natureza da ação teleológica, em geral"* (Santaella 1993: 200).

Nossa pretensão com este projeto é argumentar em favor de uma proposta lógica, portanto, semiótica de classificação dos signos matemáticos que englobem níveis diferenciados de análise. E, deste modo, a classificação aqui adotada não tem a pretensão de ser algo original nem exaustivo, mas sim, de mostrar que é possível construir um pensamento sobre o signo matemático que, de algum modo, seja condizente com a nossa proposta original. Obviamente, sabemos que nossas análises estão associadas ao momento em que a concebemos, isto é, a partir de um paradigma de percepção que permite a multiplicidade de visões percebidas. Hoje, somos levados a formular um raciocínio que englobe as diversas formas de pensar, não no sentido de unificá-las em um pensamento único, mas, de extrair delas o que podem oferecer de interessante para uma interpretação do signo matemático.

A classificação desenvolvida por Brian Rotman em seu artigo *"Toward a semiotics of mathematics"* (1988), que já comentamos várias vezes neste texto, propõe uma reflexão lógica sobre como pensavam os matemáticos do passado, sobre seus signos e sua linguagem. Para eles, no começo desse século, algumas posições divergentes sobre o signo matemático estavam em debate. Entre elas encontramos os modelos idealizados pelos formalistas, platonistas e intuicionistas que comportam os princípios que servirão de base para a matemática que conhecemos. Estes conceitos são antagônicos e incompatíveis entre si (Rotman 1988: 4), mas determinantes para a composição do modelo peirceano que adotamos para o raciocínio matemático.

6.2. As três percepções adotadas

Por volta do final do século XIX e começo do século XX, a maior parte das reflexões sobre: qual a natureza do objeto matemático, aparece junto com todos os paradoxos nas ciências. Entre eles destacamos a Máquina de Turing e o *"Teorema da Incompletude"*, de Gödel. Para este segundo, a partir de qualquer sistema formal consistente, pode-se demonstrar a sua incompletude, ou seja, nele podem existir sentenças intuitivamente verdadeiras que não são teoremas. Com isso, o conceito de demonstração em matemática teve que ser examinado e reexaminado cuidadosamente. Vários modelos de pensamento sobre este tipo de signo foram sendo construídos, de modo a se adquirir um nível de rigor maior sobre esta ciência. Solomon Marcus considera esta discussão lógica, como sendo o décimo choque cognitivo ao qual a história da humanidade teve que se expor.

A questão da Máquina de Turing e do *Teorema da Incompletude* que tratam das verdades e das possibilidades de demonstração, coloca-nos diante dos três modelos lógicos. O *formalista* que afirma que os princípios lógicos da matemática se efetuam através da construção de um sistema formal baseado em axiomas, que são abstrações dos significados dos símbolos e que eliminam o problema relativo à natureza dos signos matemáticos. Para eles, os critérios e construções devem ter a *"liberdade das contradições",* e o método formal deve ser a *"metamatemática"* de Hilbert. (Manno 1990: 153). Já a noção *platonista*, que é a mais discutida no mundo matemático pois representa a visão da maioria dos matemáticos, concebe que a matemática não é nem um jogo formal sem sentido, nem algum tipo de construção de linguagem mental, como acreditam os *intuicionistas*, mas sim, uma disciplina que pretende descobrir e validar objetivos ou verdades lógicas.

Agora, analisando cada uma delas, detalhadamente, vamos ver que os modelos se referem às etapas do processo de semiose peirceano unindo-se não pelas suas similaridades, mas justamente, pelas diferenças que ao serem compostas, dão constituição ao signo matemático. O *formalismo* contribui para o nosso pensamento pelo seu caráter gerador de possibilidades de significado, a partir de signos *"sem sentidos"*, o *platonismo* está relacionado à segundidade, em função da interação que estabelece entre o signo matemático e as verdades lógicas que ele representam e, por fim, o *intuicionismo*, que está muito próximo do logicismo, opera com signos mentais onde a concepção kantiana de algo *"a priori"* se confunde com a *"quase-verdade"* pragmática de Costa, não pelo significado mas pela posição que ocupam na percepção humana.

6.2.1. O Formalismo

Os formalistas admitem que a matemática é uma espécie de jogo sem sentido e que o seu objeto de estudo é algo material que não possui significado, é assim, como um jogo de xadrez, onde as peças não representam nada, a não ser aquilo que o jogo determina. Hilbert, principal expoente da escola formalista, acredita que a matemática é um jogo de símbolos onde certas seqüências de sinais são deriváveis de outros, segundo leis bem definidas. De fato, os seguidores deste modo de pensar acreditam que operam com transformações de signos produzidos de acordo com as não ambigüidades explícitas das regras formais. O objetivo dos formalistas é mostrar que o raciocínio matemático é consistente e incapaz de chegar a uma contradição, quando consideramos um conjunto consistente de formulações. Para eles, esta ciência é um sistema de determinar estruturas, através das marcas escritas, e não tem nada a ver com a realidade.

> *"Essas marcas são seguramente sem intenção, meras inscrições físicas onde qualquer sentido com significado está ausente; elas operam como se fossem as pedras e os movimentos do jogo de xadrez que, apesar de tudo, podem ter seus significados (por exemplo, os estratégicos da representação), porém, funcionam independentes entre si – nenhuma dúvida existirá depois do evento, apenas um crescimento da significação. Em outras palavras, o formalismo reduz signos matemáticos aos seus significados materiais, em princípio, são sem sentidos. Na afirmação clássica de Hilbert, a crença formalista matemática consiste em manipular marcas sem sentido em papel"* (Rotman, 1988: 5).

O formalismo propõe separar o raciocínio matemático, que é caracterizado pelas manipulações formais, do estudo sobre a linguagem propriamente dita. Ele afirma que as sucessões finitas de deduções lógicas, executadas através dos signos e do raciocínio sobre elas, abordam assuntos diferentes quando são comparadas com as reflexões sobre as estruturas da matemática. Esta última área de conhecimento, que observa apenas as estruturas, é a *metamatemática.* Para Hilbert, ela é uma metalógica que mostra que o primeiro tipo de raciocínio é consistente. A matemática, que é um sistema que manipula signos escritos finitos e sem sentido, de acordo com regras formais explicitamente declaradas (Marcus 1998: 18), deve ser estudada pela *metamatemática*.

No Congresso Internacional de Matemática de Paris, em 1900, Hilbert propôs o que ele pensava ser o possível caminho da estruturação e formalização desta ciência no próximo século. Formulou vinte e três problemas que pretendia abarcar as questões fronteiriças deste conhecimento e que seriam, segundo o seu ponto de vista, os principais problemas a serem tratados no século XX. Nestas formulações encontramos duas áreas importantes de atuação, a primeira considera o desenvolvimento do conceito de continuidade na aritmética de Cauchy, Bolzano e Cantor e, a outra, trata da geometria não-euclidiana de Gauss, Bolyai e Lobachevsky. Para Hilbert, este problema inicial refere-se às questões do conceito de *continuum* nos números reais e, ainda, pode ser dividido em duas partes: uma que trata dos *números transfinitos* e da possibilidade de sua enumerabilidade no conjunto dos reais e a segunda, que estabelece a ordenação destes números. (Boyer, 1974: 443). O programa formalista destinava-se a provar que toda a matemática pura poderia ser obtida a partir de um pequeno número de princípios lógicos fundamentais, justificando, deste modo, às idéias de Russell. Esta questão lógica é considerada como o 2º problema de Hilbert e foi demonstrada, em contrário, pelo Teorema da Incompletude de Gödel, que já analisamos.

Não totalmente identificados com os formalistas, mas adotando um modelo similar ao deles, encontramos os matemáticos pertencentes ao logicismo que hesitavam em aceitar a natureza inteiramente arbitrária das regras do jogo. Tendo como expoentes Gottlob Frege e Bertrand Russell, esta linha de pensamento baseia-se no fato que a lógica não é mais do que matemática disfarçada. Assim, através de formulações e demonstrações lógicas podemos mostrar que uma ciência implica na outra, segundo eles, as duas igualam-se.

Por outro lado, em desacordo com Frege e Russell a respeito da natureza do objeto matemático e do lógico, vamos encontrar Peirce afirmando que estas duas ciências são de mesma natureza estrutural e abrigam conhecimentos similares, porém, são ligeiramente diferentes. Para este último, enquanto uma, a lógica, afirma a respeito de algo preexistente, sua precedente, a matemática, não nega a existência dos elementos possíveis de serem construídos. Isto é, Peirce admite a totalidade preexistente das possibilidades na matemática e reconhece que apenas parte dela tem existente real na lógica.

A teoria semiótica pode ser classificada como um modelo de pensamento situado entre o intuicionismo, de Brouwer, e o logicismo. E obviamente, como uma teoria fundada na lógica, está mais próxima do pensamento logicista. No coração do intuicionismo as demandas empiricistas matemáticas peirceanas se limitam a operar com objetos que apenas podem ser construídos. Para os intuicionistas, existem signos que não podem ser construídos no sentido deles, ao se referir aos matemáticos como *"criador"* de signos concretizáveis. Peirce não afirma isto igual a Brouwer, mas sim, no sentido em que todas as entidades ideais são produtos da mente, e assim, têm a possibilidade de ser operacionalizadas. Assim como Hilbert, ele jamais esteve propenso a abandonar o *"paraíso criado por Cantor"* dos paradoxos e dos não paradoxos (Murphey 1961: 287-288).

O primeiro problema de Hilbert, que é uma das bases do formalismo e que aborda a noção de entidades infinitas, vai encontrar um ponto importante para a compreensão deste tipo de pensamento e de sua inserção em nosso modelo. Hilbert, assim como Poincaré, era um estudioso de todos os ramos de conhecimento da matemática. Ele muito contribuiu para a matemática superior, a física matemática, em particular a teoria da relatividade, a aritmética, o cálculo e a álgebra. Porém, foi nesta última, e mais especificamente em álgebra funcional, através dos *“espaços hilbertianos”* que trata do conceito de espaços em infinitas dimensões, que ele fundamentou o formalismo. Partindo dos princípios de Weierstrass sobre o *“infinitamente grande”* e o *“infinitamente pequeno”,* que elimina as grandezas infinitas do pensamento matemático, o principal idealizador do formalismo afirma que o infinito é uma ilusão, se considerado em suas dimensões numéricas e através do método dedutivo (Manno 1990: 179-180). Ambrosio G. Manno diz que, para Hilbert, é possível

> *“aceitar a sua crítica do infinito em ato, mas não da maneira como ele coloca o problema; ou seja, nem na relação com a extensão espacial do mundo, nem do número dos corpos elementares, problemas estes de or-*

dem experimental, acerca dos quais a ciência investiga continuamente. A matemática, como ele próprio diz, é de ordem ideal e não pode depender, nos seus processos e nos seus métodos, da ciência experimental, a não ser que não se trate da matemática aplicada" (Manno 1990: 190).

Nas diferentes formas de reflexão matemática, o pensamento formalista opera sobre fundamentos onde a questão semântica é relegada a segundo plano e as discussões sobre as formas puras encontram suporte apenas em sistemas com entidades finitas. Para Hilbert, há uma espécie de gradação das *"estruturas ideais",* necessária para se passar das simples afirmações finitas para as fórmulas de caráter geral. Ele acredita que a álgebra, assim como as lógicas são importantes para se atingir níveis mais elevados de generalizações, no entanto, as estruturas matemáticas finitárias, que são vazias de conteúdo, devem ser consideradas como *"puramente formais"*. E ainda que, estes signos fundamentados pelas formas não podem fornecer um método geral de solução dos problemas matemáticos, porque, simplesmente, *"tal método não existe"* (Manno 1990: 189). E ao tratar das infinitudes e lidar com as entidades *"infinitamente grandes"* e *"infinitamente pequenas",* estamos tratando apenas com as diferentes formas de uma afirmação, que, na visão formalista, encerram erros grosseiros e não são objetos da experiência, da observação e do conhecimento, portanto, não podem servir de base de nenhum sistema estruturado.

6.2.2. O Platonismo

Um grande número de matemáticos, os platonistas, não concorda com as propostas operativas e finitárias do pensamento formalista e adotam reflexões contrárias a ele. Seus conceitos estão fundamentados nas idéias de Platão e de seus seguidores. Para eles, desde a antiguidade, as leis ideais do pensamento humano foram estruturadas pelos lógicos da Idade Média e pela antiga filosofia e podem ser sintetizadas a partir de quatro princípios fundamentais. Elas são bivalentes (admitem apenas o verdadeiro e o falso); são normativas (pressupõe que o verdadeiro deve ser procurado); estão vinculadas à metafísica e são conceitos lógicos associados à realidade e a nossa linguagem corrente.

Apoiados nesta concepção clássica, vamos iniciar nossas considerações pelos pensamentos de Leibniz. Na metade do século XVII encontramos uma concepção de linguagem artificial desprovida de qualquer tipo de ambigüidade, introduzindo conceitos organizados pela álgebra clássica. Já, a lógica formal libertou-se das dificuldades e dos entraves da lógica clássica, a partir das formulações dos matemáticos George Boole com sua álgebra para a lógica, de Georg Cantor, De Morgan e Giuseppe Peano, todos fundamentos na teoria matemática dos conjuntos (Frege 1983: 179).

Iniciemos então pela obra de Frege, na qual o pensamento lógico começa a dar sinais de modificações. Ele trabalhou no sentido de encontrar um modelo estruturado que permitisse relacionar lógica à matemática. Mais, especificamente, a intenção de Frege sempre foi a de mostrar que as leis da aritmética fundamentam-se nas leis da lógica. No texto, *"as leis fundamentais da aritmética"*, ele apresenta um sistema axiomático lógico elaborado com um número reduzido de postulados, no qual, toda lei aritmética poderia ser deduzida, e, assim, através de um número determinado de axiomas, podemos demonstrar todas as relações internas deste sistema (Peirce 1983: 184). No entanto, contrariando as intenções de Frege, Bertrand Russell constatou que havia uma inconsistência fundamental em suas propostas, o axioma lógico referente às extensões dos conceitos era demasiadamente frágil em sua estrutura axiomática, e com isto, acabou por comprometer seu trabalho.

O objetivo deste grande lógico não foi alcançado, porém, o seu trabalho foi de fundamental importância na distinção entre *"sentido"* e *"significado".* Ele colaborou significativamente para o problema da identidade entre objetos e entre sinais de objetos e, assim, contribuiu muito para o desenvolvimento da análise semântica da linguagem. Frege com sua dedicação aos estudos da Lógica, contrariando a afirmação de Kant, que achava que a aritmética era feita de juízos sintéticos, permitiu mostrar que a Lógica não é estéril por ser analítica, assim, como também, não o é a Matemática.

Frege teve como ponto alto de sua obra a definição de *"conceitografia"*. Ele, ao tentar reduzir a aritmética à lógica, foi obrigado a elaborar uma distinção entre o *"sentido"* e *"significado"* de um objeto, de extrema importância para as suas concepções lógicas. Deste modo, ele desvinculava a lógica da linguagem corrente e concebe uma nova linguagem lógica, simbólica e artificial. Ela torna a lógica independente dos princípios de sujeito e predicado e passa a ser formulada através de função e argumento, isto é, a unidade lógica passa a ser a proposição (Frege 1983: 182). Frege também mostrou que toda expressão aritmética pode ser admitida em termos lógicos e, ainda, que as proposições lógicas obtidas poderiam ser deduzidas de leis lógicas imediatamente evidentes. Segundo o próprio Frege, em suas *"leis fundamentais da aritmética"*, ele procurou

> *"tornar provável que a aritmética fosse considerada um ramo da lógica e não tivesse necessidade de arranjar um fundamento demonstrativo, nem na experiência, nem na intuição. Neste livro deve ficar provado que as mais simples leis dos números devem ser deduzidas só com meios lógicos"* (Frege *apud* Manno 1990: 190).

De acordo com as pretensões de Frege, as afirmações matemáticas são proposições lógicas que admitem princípios que podem ser apenas verdadeiros ou falsos, são declarações de fato sobre algum tipo definido de negócios, uma realidade objetiva que existe independente e antes da investigação matemática. Frege acredita que as sentenças expressam os pensamentos. Para ele, um pensamento é algo que trata da verdade e pode ser considerado como algo material, assim, não deve pertencer ao *"mundo exterior das coisas perceptíveis"* que existem e não dependem da verdade. Por outro lado, os pensamentos não pertencem ao *"mundo interno"* das sensações, dos sentimentos e dos desejos. Frege dizia que tudo são idéias que precisam ser experimentadas por alguém, em sua individualidade, e este alguém, ele denominava *"portador dos pensamentos"*. No entanto, se os pensamentos não são algo interno e nem externo, então são:

> *"uma terceira espécie de reino que deve ser reconhecido. E o que pertence a este reino, corresponde às idéias, é não pode ser percebido por algum tipo de sensação, mas entre coisa, não precisa de um 'portador' para o seu conteúdo. Então, por exemplo, na consciência onde expressamos o teorema de Pitágoras, ele é temporalmente verdadeiro, e é verdade que, independentemente de qualquer pessoa, isto deve ser tomado como verdadeiro. Ele não precisa de um 'portador'. Ele não é verdade na primeira vez, quando o descobrimos, mas é como um planeta que antes*

de alguém vê-lo, está interagindo com os outros planetas. (Frege *apud* Rotman 1990: 26-27).

De fato, a grande contribuição de Frege foi transformar a lógica em uma ciência que, a partir dele, passa a operar independente da linguagem formal. Ele construiu uma estrutura axiomática, apoiada na inferência indutiva, que o ajudou a criar uma linguagem abstrata e artificial, e também, o ajudou a criar o conceito de números infinitos.

"Para a demonstração da infinidade da série dos números fez-se necessária a proposição de que nenhum número finito segue após si próprio na série natural dos números. Chegamos, assim, aos conceitos de números finito e infinito. Mostrarmos que fundamentalmente este não é, do ponto de vista lógico, menos legítimo que aquele. Referimo-nos, para comparar, aos números infinitos de Cantor e a seu "seguir em uma sucessão", sendo aí indicadas as diferenças de terminologia. De tudo que precede, resultou muito provável a natureza analítica e a priori das verdades aritméticas; e pudemos aperfeiçoar a concepção de Kant. Vimos também o que ainda falta para elevar esta probabilidade a uma certeza, e indicamos o caminho que a isto deve conduzir" (Frege 1983: 276).

Mais adiante na história, podemos ver que, para os sucessores de Frege, há uma separação clara entre lógica e matemática. Para eles, afirmações matemáticas são fatos que descrevem as propriedades de coleções abstratas, enquanto a lógica é uma forma de preservar as verdades das conclusões, as quais providenciam os meios de provar que estas descrições são verdadeiras. Vemos com isso, que a matemática platonista é uma ciência da realidade, seus símbolos são de uma certa realidade, suas afirmações são de algo determinante, seus problemas são objetivos e a sua epistemologia é enquadrada diante do que pode ser provado como verdadeiro e falso. Para os platonistas, nós estando preocupados com a realidade (Marcus 1998: 18).

"Esta verdade fundamentar-se-ia apenas pelo pensamento, ou, para falar como Mill, pela manipulação artificiosa da linguagem... A observação teria finalmente que decidir se as condições contidas nas leis, assim funda-

mentadas, são satisfeitas. Deste modo, chegar-se-ia por fim, precisamente, ao ponto que seria atingido mediante a remissão imediata da cadeia de raciocínio aos fatos observados" (Frege 1983: 216).

Deste pensamento de Frege, sobre as reflexões de John Stuart Mill, podemos extrair um dos princípios que nos auxiliará a estabelecer a conexão de nosso modelo com às contribuições do platonismo. A *"manipulação artificiosa da linguagem"* e a *"cadeia de raciocínio"* dos fatos observados são procedimentos que mostram a lógica da indução sendo utilizada pelos platonistas. Ao fundamentar todos os seus pensamentos e sua matemática sobre a inferência indutiva, que é utilizada para se chegar às leis gerais a partir de um processo de experimentações dos fatos, somos conduzidos ao pensamento de Peirce. O *"System of Logic"* de Mill define que a indução é a *"generalização da experiência"* e que isto consiste em

"inferir de alguns casos particulares em que um fenômeno é observado, que ocorrerá em todos os casos de uma determinada classe, isto é, em todos os casos que se assemelham em circunstâncias essenciais" (Mill *apud* Bacha 1999: 14).

E é assim que os platonistas, ao tratar dos objetos matemáticos como se referindo a algum tipo de realidade, observada experimentalmente pela indução, nos faz perceber que estamos analisando o fenômeno matemático metaforicamente. Aqui ele nos revela a sua segundidade. Para Gödel, assim como também para Frege, os objetos matemáticos existem realmente e a mente humana possui uma faculdade que adquire à intuição do comportamento destes objetos, cada vez melhor (Einaudi 1988: 63). Esta faculdade é distinta, porém, não é completamente diferente da intuição e, por sua vez, pode, através do método indutivo, definir os números infinitos.

O paradoxo de Russell, os números transfinitos e a teoria das séries formam mais um dos choques cognitivos de Marcus, o sétimo. Os responsáveis por mais este choque lógico sobre a humanidade são, estes conceitos que se resumem na noção de infinito dos números. Para Marcus, Russell e Gödel mostraram que a teoria das séries possui um conflito interno, no qual o princípio da não-contradição, não pode evitar a armadilha da circularidade. E então, como solução Russell propõe *"a teoria dos tipos"*, mas, esta solução foi bastante marginalizada, pois tinha um sério problema que era o fato de não se preocupar com o problema do infinito (Marcus 1997: 3).

Na verdade, o pensamento platonista difere fundamentalmente do formalista, pois propõe que a lógica não é simplesmente uma teoria sobre símbolos sem sentido. Os platonistas, ao contrário dos seguidores de Hilbert, acreditam que os signos têm significado e que todo conjunto de axiomas é estabelecido a partir de algum tipo de existente. Enquanto os formalistas operam com símbolos vazios de significado, graças ao artifício da formalização. Já os platonistas fazem o contrário, através do método indutivo estabelecem princípios que podem leva-los às questões dos procedimentos infinitos. Eles acreditam nos *números transfinitos* e na *hipótese do continuum.* Russell, a partir da *"teoria das classes"* e depois da *"teoria dos tipos",* tenta estabelecer a verdade sobre o *"axioma do infinito"* e, para ele, se

> *"há razões empíricas para provar a infinidade dos entes do mundo,... não há, por agora, qualquer razão empírica para nos fazer supor que o seu número é finito. 'Dado que o infinito não é uma contradição em si, mas também não é demonstrável por via lógica, concluímos que não se pode saber a priori se o número de coisa existentes no mundo é finito ou infinito'. Tal como Leibniz, Russell, admite que alguns dos mundos possíveis são finitos, outros infinitos. 'O axioma dos infinitos será verdadeiro em alguns mundos possíveis e falso em outros; mas não podemos dizer se é verdadeiro ou falso neste mundo"* (Einaudi 1988: 63).

Permitindo em seu sistema um raciocínio sobre a *continuidade,* as *infinidades* e sobre *algo existente*, os platonistas contribuem em nosso modelo semiótico, com aquilo que pode ser tomado em segundidade. Os números referem-se ao conjunto dos objetos que são: pedras, animais, áreas terrestres, proporções em mapas, medidas em desenhos, no tempo e do dinheiro e, mais complexamente, também representam as continuidades estabelecidas nas teorias da Física, Química e Economia. Segundo os platonistas, os números são *possíveis existentes*, colocados na individualidade do ato de contar estabelecendo o que é discreto e o que é infinito nas séries e sucessões ordenadas. Eles são entidades potenciais que permitem a organização e a produção de conhecimento, em algum campo fora do mundo finito dos formalistas.

Segundo a doutrina do meio ambiente de Uexküll, os organismos possuem, cada qual, o seu meio ambiente interno, que é determinado subjetivamente. Nisto, verificamos um modelo que estabelece níveis semióticos, a partir da interação pura e simples, do organismo com seu *Umwelt,* que, por sua vez, são concebidos na mediação entre *"fatores perceptuais* e *operacionais"* dos *"sujeitos"* em seu meio ambiente subjetivo. O *Umwelt* é decisivo para a sobrevivência de qualquer organismo. O círculo funcional de Uexküll é relativo ao mundo das plantas e dos animais, incluindo nele o homem. Por ele podemos determinar o processo cognitivo do *"receptor de significados"* que é o *"sujeito"* que através de seus *"órgãos perceptivos e efetuantes"* interage com o mundo, de modo prático, com os elementos *"portadores de significação"* determinando e sendo determinado pelo *Umwelt* (Nöth 1990: 158).

Assim, as evoluções semióticas que atentam para os fenômenos enérgicos e informacionais no espaço e no tempo, são os *"campos perceptuais e efetuantes"* que podem providenciar, com muita determinação, novas sínteses de nossos sistemas cognitivos (Anderson *et. al.*1984: 27). Diante da inferência indutiva e do processo de significação dos objetos matemáticos, executados pelo *Agente*, de Rotman, vamos encaminhar nossa análise para o último modelo que queremos observar. Abordaremos agora o intuicionismo de Brouwer que, neste modelo, é terceiridade. E, de fato, os números são objetos que são capazes de dar resultados na interação entre as atividades de pensar, imaginar ações e de praticar, operar com *"marcas"* ideais, inseparáveis. Os matemáticos pensam através de *"marcas"* e imaginam um potencial existente, determinando uma regra de lei (Rotman 1990: 32).

6.2.3. O Intuicionismo

Para os intuicionistas, a matemática é pura construção mental, uma forma de operação interna da mente humana. Eles acreditam que os objetos matemáticos são criações do espírito, entidades abstratas, fruto puro e simples do pensamento. Para Brouwer, o grande formulador do pensamento intuicionista, a matemática é uma linguagem axiomática que serve como base para toda a atividade de formular logicamente. Eles não consideram os números como entidades concretas, nem entidades ideais existentes em si e por si, mas sim, *"construções mentais"* que só devem existir em pensamento.

Para o programa intuicionista a proposição de existência dos números somente é verdadeira, se puder mostrar que existe uma determinada espécie de número, ou seja, uma proposição somente pode ser formulada através dos números se, por algum processo lógico, puder ser construída. Para eles, não se deve fazer afirmações sem demonstrá-las. E, baseados em um modelo do pensamento kantiano, os seguidores de Brouwer admitem as distinções existentes na mente, entre os fatos *"empíricos"* e os fatos *"a priori".* E assim, na base da matemática está o poder intuitivo fundamental da mente, que identifica a experiência como um processo. A matemática é a construção do que não é observável; do que é invisível em pensamento e através do qual os signos matemáticos são criados.

Para melhor entender o pensamento de Brouwer e dos matemáticos ligados a ele, vamos destacar as principais características do seu modelo de raciocínio. Eles acreditam que:

1. os números *são "construções do intelecto"*, baseadas na intuição elementar, ou, por si só, evidentes, que dão origem a uma *"intuição primitiva"* ou *"a priori"* no ato de enumerar, conforme concebia Kant;
2. um processo demonstrativo é *"construtivista"* se permite calcular, ou em geometria, se permite construir, o objeto da afirmação. Ele sempre deve ser mostrado;
3. a *"intuição primitiva"* existe em todos os sujeitos que raciocinam, daí a natureza intelectual da matemática que, para todos os sujeitos, é independente da experiência na sua identidade estrutural;
4. em matemática não há a noção de infinito;
5. por fim, nem todas as proposições matemáticas são *"decidíveis"* e, para as *"indecidíveis",* não vale a lei do terceiro excluído, isto é, dado qualquer proposição A existe a proposição B que é A ou não A, pois não há outra alternativa.

O matemático Henri Poincaré é conhecido pelo seu domínio de todas as áreas da matemática e também é um dos integrantes do grupo de Brouwer. Não tão convicto dos fundamentos intuicionistas, quanto o primeiro, Poincaré formulou apenas alguns pensamentos fundamentados em predileções intuicionistas. Num Congresso Internacional Matemático, realizado em Paris, contrariando a posição de Hilbert sobre os espaços abstratos, ele escreve um artigo que propõe comparações entre a lógica e a intuição matemática, fortalecendo a grande polêmica lógica da matemática no século 20.

Antes deles, iniciando o pensamento intuicionista, encontramos Leopold Kronecker, que rejeita categoricamente a construção dos números reais. Para ele, este conjunto não poderia ser construído através de processos finitos de elaboração, gerando outra famosa discussão entre ele e Cantor. Poincaré e Brouwer fizeram reaparecer os conceitos de Kronecker sob uma nova forma e, assim, dão nova vida a antiga polêmica entre Cantor e Kronecker que abordava as numerações definidas para os conjuntos dos números finitos e infinitos.

Os intuicionistas acreditam que, se existe um objeto com uma determinada propriedade, então também deve existir um método, claramente conhecido, que permite a construção deste objeto através de um número finito de passos. Para eles, a aritmética transfinita, que é aquela que opera com os números infinitos, não tem significado, pois não pode ser construída em sua infinidade. Eles também não acreditam existir a demonstração por absurdo e a noção de terceiro excluído, pois não podem ser demonstradas.

Brouwer afirmava que os elementos e axiomas da matemática são menos arbitrários do que parecem, e com este argumento atacava o pensamento dos formalistas e dos logicistas. Ele criticou profundamente os fundamentos lógicos da aritmética e da análise e mostrou que a linguagem e a lógica não são pressuposições para a matemática que tem origem na intuição e que se mostram como inferências óbvias.

Entre os intuicionistas encontraremos Hermann Weyl que cria uma estreita relação entre a matemática abstrata e a teoria científica, fundada nestas concepções. Por outro lado, temos também Poincaré que ajudou a sustentar a teoria da relatividade de Albert Einstein tratando do espaço, do tempo e da matéria pela ótica dos modelos lógicos quânticos. Weyl, argumentando no sentido que a análise do *continuum* da aritmética era uma teoria com base pouco sólida e, contrariando seu colega Hilbert, afirma que os formalistas tinham edificado uma casa construída sobre a areia e seus fundamentos não tinham boas sustentações (Boyer 1974: 449).

O formalismo de Hilbert e o intuicionismo de Brouwer, como vimos, surgem em resposta ao paradoxo do infinito. O modelo intuicionista sempre foi categoricamente contrário ao programa platonista, pois concebiam as questões relativas às infinidades de maneira completamente oposta a este último. O problema, para eles, é o fracasso da matemática ortodoxa de inspiração platonista que separa os objetos formais da matemática, mentalmente concebidos, dos aspectos secundários destes signos relativos ao discurso lingüístico, através do qual os matemáticos operam por palavras (Rotman 1988: 12). Assim, estamos diante de um aspecto que consideramos de grande importância para a nossa discussão, qual seja: os aspectos semânticos que são determinantes em qualquer modelo.

Estes aspectos unidos à lógica indutiva, uma das características do modelo platonista, nos faz experimentar uma regra, até que ela se mostre irrefutável diante do modelo que adotamos ou que nos seja persuasiva. Por exemplo, quando não conseguimos esgotar todas as possibilidades de experimentação da afirmação $x+y = y+x$, onde x e y são números inteiros, somos persuadidos a acreditar que a propriedade comutativa é válida no conjunto dos números interos, na verdade, somos conduzidos de modo a acreditar nesta formulação, isto é, somos persuadidos pelo terceiro sujeito semiótico de Rotman, *a Pessoa*, a acreditar na propriedade comutativa nos números inteiros.

Diante deste processo infinito de interpretações, que não é diferente do processo finito admitido pelos formalistas, o signo matemático se realiza em todo seu potencial existente. E, desde modo, a matemática é a completa realização em busca das verdades estabelecidas pelos assuntos matemáticos. Ela é construída na relação triádica entre o Agente, o Matemático e a Pessoa que imagina, operacionaliza e determina conhecimento, respectivamente (Rotman 1990: 34). E assim, finalizando a compreensão do pensamento matemático em si, os três modelos: formalismo, platonismo e intuicionismo se completam, definindo o nosso modelo semiótico peirceano.

6.3. A verdade em processo e uma lógica que se adapte a ela

Finalizando as questões pragmáticas que queremos observar nesta pesquisa, concluímos pela teoria peirceana, na qual todas as formas de representação humana são formas lógicas de organização, que permitem, através do processo semiótico, gerar novas formas de representação e interpretação do mundo. Ao explorar este universo sígnico estamos buscando a organização do pensamento, agregando valores à discussão semiótica dos espaços topológicos matemáticos e suas representações através das novas tecnologias, aumentando o grau de complexidade e de compreensão da matemática.

A teoria pragmática peirceana e seus princípios fundamentados nas categorias universais do pensamento nos possibilitam discutir aspectos como a existência, a continuidade, a infinidade e a verdade nas ciências matemática e, obviamente, na lógica como conseqüência de nossas observações sobre as teorias formalista, platonista e intuicionista. Admitindo a contemporaneidade de Peirce, comecemos retomando o conceito da *"verdade pragmática"* da teoria semiótica que Jair Minoro Abe aborda em seu texto. Para ele:

> *"há pelo menos, quatro teorias da verdade que se evidenciam de relevância para o filósofo que se ocupa da Teoria da Ciência: 1ª) a Teoria da Correspondência, particularmente na forma que lhe conferiu A. Tarski; 2ª) a Teoria da Coerência; 3ª) a Teoria da Pragmática e 4ª) a Teoria da Eliminação da Verdade (ou definibilidade da verdade)"* (Abe 1991: 161).

A verdade pragmática que é aquela que nos interessa, e como Peirce a descreveu, é relativa aos efeitos práticos ou as suas correspondências básicas, que não são completamente desvinculadas de sua correspondência com a realidade. Para Peirce,

> *"diferentes pessoas podem começar com os mais antagônicos pontos de vista, mas o progresso da investigação acaba por levá-los, forçosamente, para fora de si mesmos, à única e mesma conclusão. Essa atividade do pensamento por meio da qual somos levados, não aonde desejamos, mas a uma finalidade pré-fixada, é semelhante à questão do destino. Nenhu-*

ma modificação do ponto de vista inicial, nenhuma mudança natural de postura, pode fazer com que um homem escape da crença predestinada. Esta grande esperança é englobada na concepção da verdade e da realidade" (Peirce *apud* Abe 1991: 164).

Peirce acredita que o pragmatismo é "*a busca da verdade nas ciências"* e em seu Diagrama, como já observamos, ele afirma que a filosofia tem como principal tarefa descobrir o que é verdadeiro que, por sua vez, pode ser inferido da experiência comum a todos ser humano. Para isso, a filosofia estuda a fenomenologia, as ciências normativas e a metafísica. Na primeira, a fenomenologia, estudamos as categorias universais da experiência: *primeiridade*, *segundidade e terceiridade.* Na segunda, as ciências normativas, tratamos dos fins, das normas e dos ideais que ditam o sentimento, a conduta e o raciocínio humano. A terceira, a metafísica, investiga o que é real dado na experiência. Em 1902, Peirce argumentando sobre as ciências normativas, em uma carta para Willian James, relatou seus passos até chegar concluir pela unidade de seu pensamento.

"Minha própria visão de 1877 era crua. Mesmo quando dei as palestras de Cambridge não havia ainda realmente chegado ao fundo dela ou visto a unidade das coisas. Isso não foi senão depois de ter obtido a prova de que a lógica deve estar fundada na ética, da qual ela é um desenvolvimento mais elevado. Mesmo então fui por algum tempo tão idiota a ponto de não ver que a ética, do mesmo modo, repousa na fundação da estética" (CP 8.255).

Por outro lado, Newton Costa, refletindo sobre as ciências e o conhecimento científico, está muito próximo deste pensamento de Peirce. Ele também atribuiu fundamental importância a lógica no seu livro, *"ensaios sobre os fundamentos da lógica".* Nele, Costa afirma que a ciência esta fundamentada em três princípios pragmáticos da razão: o princípio da sistematização, *"onde a razão sempre se expressa por meio de uma lógica"*, o princípio da unicidade, *"onde em um dado contexto, a lógica subjacente é única"* e o princípio da adequação, *"no qual a lógica subjacente a dado contexto deve ser a que melhor se adapte a ele"*.

E assim, a noção de *”verdade”* nas ciências é determinada por algum tipo de lógica. Neste texto, é fundamental a importância que estabelecemos para o paradigma logicista dado pela visão de Peirce, que claramente nos orientou na confecção desta tese de doutorado. E, também, não podemos deixar de lado, a forma de pensar a matemática e a lógica, desde o século XIX, de Frege a Costa, passando por Russell, Hilbert, Gödel, Carnap, Popper e Lakatos. Estes três últimos são importantes na medida em que auxiliam na construção da *“lógica paraconsistente”* de Newton Costa (Costa 1991: 13), a qual, a partir de agora, explanaremos esquematicamente em nosso trabalho. Jean-Yves Béziau, na introdução do livro, *“O conhecimento científico”* de Costa, constata que ele não enaltece

> *“uma ciência todo-poderosa, que nos permitiria descobrir a verdade em sua absoluta nudez. No entanto, sua teoria da quase-verdade preserva a idéia de uma (quase) verdade inviolável e irrevogável. Como ele gosta de repetir, o que tem sido verdadeiro permanece verdadeiro e será verdadeiro por toda a eternidade. Há verdades relativamente absolutas, isto é, absolutas com relação a um campo de aplicação, como a teoria de Ptolomeu. ... O que se encontra na linha de mira de Costa é sobretudo a teoria popperiana da refutação, que surge nesse contexto como um brilhante absurdo. O que confere força a uma teoria, desde a época grega, é, de fato, sua capacidade de desvelar a verdade, tão limitada quanto seja, e não sua eficácia em veicular erros, tão refutáveis quanto possam ser”* (Costa 1991: 12).

O critério da consistência, que antes era característica essencial das teorias matemáticas, passa a permitir as inconsistências em nossos modelos, e o *“princípio da tolerância”* (1993: XIII), que hoje toma lugar nas ciências, abre espaço para verificarmos que em qualquer teoria possível, e permissível, que não seja trivial, tenhamos pontos de vista sintático e semântico, e nós acrescentamos pragmáticos. Esta formulação sobre a *lógica paraconsistente* tem três aspectos que devem ser realçados, e explicados, para melhor compreendermos o pensamento de Costas. Os dois primeiros são relativos à definição de *lógica paraconsistente,* propriamente dita, e de *trivialidade* dos modelos e o terceiro, que é o que mais nos interessa, mostra a relação existente entre álgebra, semântica e os modelos infinitos. Costa define seu modelo lógico do seguinte modo:

"Dada uma teoria dedutiva $\mathcal{T}$, cuja linguagem contenha um símbolo de negação, por exemplo, **~***, ela é dita inconsistente se o conjunto de seus teoremas contém ao menos dois deles, um dos quais é a negação do outro. Neste caso, sendo* ***A*** *e* ***~A*** *tais teoremas, normalmente deriva–se em $\mathcal{T}$ uma contradição, isto é, uma expressão da forma* ***A*** *&* ***~A****; caso isto não aconteça , $\mathcal{T}$ é consistente. A teoria $\mathcal{T}$ é trivial se o conjunto de suas fórmulas coincide com o de seus teoremas, ou seja, dito informalmente, se todos os enunciados sintaticamente corretos do ponto de vista da linguagem de $\mathcal{T}$ puderem ser provados em $\mathcal{T}$; se este for o caso, a teoria não permite que se distinga o "demonstrável" do "não demonstrável", não apresentando, aparentemente, interesse algum, uma vez que não se poderá, por assim dizer, separar o verdadeiro do falso"* (Costa 1993: IX).

Já, a relação entre álgebra, lógica e matemática, pode ser encontrada na afirmação de Jean-Yves Béziau, quando argumenta, no livro de Costa, sobre as estruturas da lógica. Para ele, *"todas as estruturas matemáticas são estruturas algébricas"* e *"uma lógica que não possui uma formulação algébrica não pode ser concebida como uma estrutura matemática"* (Costa 1993: 155).

Por outro lado, Nicolas Bourbaki, um grupo de matemáticos francês do século XX, publicou textos com este pseudônimo, reconstruindo e reorganizando a matemática do ponto de vista estrutural. O grupo classificou o mundo matemático em três áreas de conhecimento distintas: em estrutura de ordem, algébrica e topológica. Todos os trabalhos realizados pelos Bourbaki foram desenvolvidos com base na álgebra abstrata (Dieudonné 1982: 619). E, para Birkhoff, segundo Costa,

"há aqueles que pensam que as estruturas algébricas são mais fundamentais que as outras (consulte Papert 1967), sendo os protótipos de todas as estruturas. Mas se seguirmos a idéia inicial de Birkhoff (Birkhoff 1946), de acordo com a qual uma álgebra é um 'conjunto com operações', parecerá um tanto artificial considerar que todas as estruturas são álge-

> *bras e talvez, por exemplo, uma estrutura de ordem possa ser considerada como uma álgebra (veja Cohn 1965, p. 63), mas inicialmente ela não o é. No melhor dos casos, pode-se dizer que uma estrutura de ordem é 'equivalente' a uma álgebra"* (Costa 1998: 156).

Agora, finalizando este capítulo, cabe reunir os aspectos formulados até aqui, através do pensamento peirceano, em uma reflexão que nos remete diretamente à questão das infinitudes, vitais para a matemática de nosso tempo. Qual seja: o formalismo de Hilbert e também o intuicionismo de Brouwer, como vimos, são princípios que surgem em resposta ao paradoxo do infinito. Eles emergem na matemática do século passado e vão marcar profundamente o debate sobre a natureza do objeto matemático e, como não poderia deixar de ser, também do modelo semiótico que ora propomos. O sistema formalista e o intuicionista têm como princípio que a matemática é operativa e construtiva e que seus sistemas são construídos num domínio externo à realidade e, por isso, sempre foram categoricamente contrários ao programa platonista e as suas discussões sobre as infinitudes. Observar as entidades matemáticas pelo que elas são *"infinitas",* nos lança em direção às verdades eternas e absolutas do platonismo.

Porém, sabemos de Peirce, que o método de investigação científica é básico para qualquer processo de reflexão e a *"verdade absoluta"* de nossos modelos, hoje, dá lugar *"às verdades relativas"* dos modelos ou às *"quase-verdades"* de Costa. O fato é que, ao algebrizarmos uma teoria matemática estamos, entre outras coisas, dando-lhe uma forma sintática e uma estrutura semântica e, ainda, uma orientação pragmática, pois

> *"jamais se deve esquecer que ela [a matemática] se desenvolve no decurso da história e que o esquema lógico anterior apenas nos fornece visão esquemática do conhecimento em determinado momento"* (Costa 1996: 26).

Hoje, edificamos nossos modelos axiomaticamente estruturados em lógicas que melhor se adapte a eles. As estruturas lógicas, inclusive aquela relativa a *lógica paraconsistente* que aparenta não possuir uma semântica, devem ser organizadas algebricamente. Podemos afirma que toda a estrutura matemática é algebrizável e, por isso, possui uma base semântica (Costa 1998: 152).

Resumidamente, os signos constroem o pensamento e o pensamento constrói os signos e, como *"algo em processo"*, a razão matemática é mais complexa e interessante do que qualquer interpretação particularizada que possamos realizar. Na lógica da descoberta, em *abdução*, temos nossas idéias que, na matemática, são frutos de concepção do *Matemático* de Rotman. Em seguida, estas idéias são testadas e operacionalizadas através dos signos matemáticos e de suas estruturas algébricas. O *Agente* tem o papel de manipulador o código idealizado pelo Matemático. Ele executa ações e observa resultados lógicos na linguagem matemática. A partir destes resultados, a *Pessoa*, é persuadida a concluir por uma demonstração ou uma predição matemática (Rotman 1990). Em verdade, neste contínuo processo de reflexão lógica estamos construindo a matemática.

7. CONCLUSÃO

Iniciamos nossas conclusões delineando qual é a natureza do conhecimento matemático, obviamente fundamentados em uma reflexão que analisa as imagens produzidas por esta linguagem no contexto tecnológico, como sendo parte do todo, observado holisticamente. Por isso, acreditamos que a construção deste *modelo semiótico dos espaços topológicos e suas representações*, fundamentado na teoria de Charles Sanders Peirce, é nossa melhor conclusão.

A beleza estética desta construção deve ser observada pelas *imagens mentais e visuais* que gera, determinada pelo nosso *Umwelt* e pelos dados das experiências, em *indução,* organizados pelo princípio de *autopoieses.* Ficamos perplexos quando, através das *inferências abdutivas*, conseguimos organizar o nosso pensamento, parecendo extrair do *"nada",* logicamente estruturado, nossos melhores *"insights"*. E depois de exaustivas experimentações, chegamos às *"quase-verdades"*, nas quais acreditamos profundamente, até que novos modelos com suas novas fundamentações venham a substituí-las, num contínuo processo de construção de conhecimento.

A semiótica peirceana é considerada como um *“método para determinar os significados dos conceitos intelectuais ou aqueles sobre os quais o raciocínio se desenvolve”* (Santaella 1993: 209). E como todo método, é um conjunto de princípios axiomáticos que nos conduzem às conclusões necessárias diante dos processos experimentais a que submetemos os objetos formais e empíricos que se encontram ao nosso redor. Assim, nossa *análise semiótica dos espaços topológicos matemáticos e suas representações no contexto tecnológico* se configura como íntegra e coesa; um modelo holístico que nos permite refletir sobre o que é discreto e o que é contínuo nesta ciência e que está estruturado sobre a *”vaguidade”*.

A matemática que, por princípio é axiomática, produz conhecimento a partir da semiose dos signos e que, por sua vez, se caracteriza por estar em constante evolução. Deste modo, não devemos classificá-la em compartimentos estanques ou em correntes de pensamentos isoladas, pois, estaríamos extraindo desta forma de conhecimento o que ela tem de mais precioso, a vida. E, como um processo sígnico que é, está aberta a um número infinito de possibilidades de interpretações, que nunca se esgotam, pois possui a característica fundamental de estar sempre em mutação.

Sabemos também que o raciocínio matemático nasce em consonância com os valores do momento em que é concebido, e, agora, finalizando esta tese de doutorado, podemos dizer que a estrutura que tínhamos em mente, como hipótese inicial de trabalho, configurou-se fundada na teoria semiótica peirceana. A *lógica da descoberta* ou a *inferência abdutiva* conduziu-nos a esta idéia, que ao ser experimentada e estruturada nas *inferências indutiva* e *dedutiva,* e permeada pelo contexto tecnológico, virtual e interativo em que vivemos, nos levou aos espaços topológicos expondo-nos, cada vez mais, a uma matematização de tudo, a começar pelas representações visuais. *As imagens matemáticas* estruturadas com base em axiomas, lemas e teoremas, têm a capacidade de estabelecer um número finito de proposições em uma determinada lógica, que são suficientes para permitir a organização de nossos modelos abstratos ou não, isolando-os em estruturas matemáticas.

Vários pontos secundários poderiam ser destacados ao final deste texto, no entanto, daremos ênfase a apenas dois porque acreditamos ter elaborado estes destaques no decorrer de cada capítulo. O primeiro ponto forte deste trabalho, além do modelo em si, é o fato de observarmos a matemática como uma linguagem construída em diagramas e em imagens dialogicamente estruturadas, tendo como base a teoria semiótica. Sabemos que cada aspecto do conhecimento humano, segundo Peirce, pode ser observado pelas suas perspectivas realçadas em primeiridade, ou em segundidade ou em terceiridade, porém, a matemática parece ser uma ciência que tem seus alicerces constituídos nas três categorias fundamentais do pensamento, com intensidades semelhantes. Ela, fortemente estruturada em níveis icônicos de percepção, está centrada na qualidade do que podem representar as imagens, os diagramas e as metáforas construídos no seio desta ciência, buscando conseqüências necessárias diante de uma lógica que melhor se adapte a cada modelo gerado. Portanto, é um raciocínio equilibrado sobre as três categorias peirceanas de forma harmonicamente estabelecida, não dando ênfase nem à primeiridade, nem à segundidade e nem à terceiridade. A matemática gera conhecimentos que são simulacros muito próximos do que concretizamos logicamente em nossas imagens mentais, se não elas próprias. Os signos matemáticos são concebidos em nossas mentes, como imagens e diagramas que são operacionalizados nas diversas formas de elaboração desta linguagem pelas imagens, pela escrita e pelos modelos lógicos para, finalmente, conceber esta enorme rede de fundamentações lógicas que é a própria ciência matemática.

A outra característica que queremos destacar do contexto matemático atual é o fato de que os cientistas, a partir do final do século XIX, deixam de observar seus objetos de estudo apenas pela vertente lógica e analítica de seus modelos, e passam também a dar ênfase aos aspectos topológicos de seus estudos. Após a concepção dos *“diagramas de Venn”*, da teoria dos *“grafos existenciais”* de Peirce e, principalmente, a partir das abordagens *“topológicas dos espaços matemáticos”* de Poincaré, uma nova concepção topológica toma conta da percepção e dos paradigmas científicos. Poincaré estudou topologia algébrica, teoria das funções analíticas de variáveis complexas, geometria algébrica, fez contribuições nos campos da topologia e da topologia algébrica, enfim, trabalhou na *teoria de homotopia,* a qual reduz a álgebra aos espaços topológicos, associando, definitivamente, o conhecimento matemático aos fundamentos dos grupos e da topologia. O conceito de *”espaço de estados”* de Poincaré introduz uma nova estratégia matemática de modelagem de sistemas que está baseada numa observação complexa, dinâmica e não-linear de construção. Isto leva os cientistas a conceberem o universo do conhecimento humano associado, muito mais, aos aspectos topológicos de suas observações que aos aspectos analíticos. Os sistemas passam a ser estabelecidos de modo muito mais complexo e estão em constantes alterações, nas quais qualquer pequena perturbação pode ter um efeito determinante e suas causas somente podem ser associadas às questões relativas ao acaso.

É por isso que hoje a imagem deve ser exaustivamente estudada, principalmente quando está associada à cognição humana. Por detrás de nossas imagens encontramos os números, os sistemas lógico consistente, paraconsistente, difuso, etc., os espaços topológicos de representação, os modelos determinados pela práxis, enfim, o homem, a natureza e seu meio ambiente.

De fato, a matemática é uma forma de organização do pensamento que se concretiza através de signos mentais e visuais, abstratamente concebidos em modelos, que, conseqüentemente, buscam as *“quase-verdades”* sob a ótica de uma lógica que melhor se adapte a eles. Classificada em três categorias fundamentais do pensamento, assim como tudo para Peirce, a matemática é a base de seu diagrama classificatório das ciências. E assim, estamos certos de ter dado continuidade à nossa dissertação de mestrado, aprofundando ainda mais, o que lá denominamos de *“umatemar”* como sendo *“uma arte de racionar”* (Hildebrand, 1994).

Os capítulos *por uma semiótica da imagem matemática*, *da escrita matemática* e *do modelo matemático* ao serem reunidos, formam o modelo que pretendíamos construir e, conseqüentemente, o que entendemos ser a totalidade da semiose do signo matemático. Ele, em sua relação, quando se refere ao *representamen* é *imagem*, quando se refere ao objeto é *diagrama* e quando se refere ao interpretante constrói as *metáforas*. De fato, a matemática como raciocínio é terceiridade; como diagrama que possui partes, que se relacionam com outras partes dentro de sua própria estrutura, é segundidade e como estrutura em um nível de percepção icônico, centrado na qualidade que expressa de suas imagens, é primeiridade. Esta ciência gera *imagens matemáticas* que são simulacros *"quase-perfeitos"* de nossas *imagens mentais*. Acreditamos, ao finalizar este texto, ter contribuído para aumentar os níveis de complexidade e análise sobre os signos matemáticos, em particular sobre *as imagens matemáticas.* Os signos constroem o pensamento e o pensamento constrói os signos e, como *algo em processo* é estruturado sobre a *falibilidade,* a interpretação do raciocínio matemático é mais complexa e interessante do que qualquer interpretação particularizada que possamos realizar.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABE, Jair Minoro (1991). Verdade Pragmática. In *Estudos Avançados 12(5)*: 161-171. São Paulo: EDUSP.

ANDERSON, M.; **DEELY**, J.; **KRAMPEN**, M.; **RANSDELL**, J.; **SEBEOK**, T.; **UEXKÜLL**, T. (1984). A semiotic perspective on the sciences: steps toward a new paradigm. *Semiotica*, 42 (1-2): 7-47.

APPEL, Kenneth & **HAKEN**, Wolfgang (1978). The four-color problem. In *Mathematics Today.* Berlin-New York: Springer.

AUMONT, Jacques (1993). *A imagem.* Campinas: Papirus.

AZEVEDO, Wilton (1994). *Criografia - A pintura tradicional e seu potencial programático.* Texto inédito. São Paulo: Tese de doutorado apresentada no Departamento de Comunicação e Semiótica da Universidade de São Paulo.

BANCHOFF, Thomas and **MAX**, Nelson L. (1981). Every sphere eversion has a quadruple point. In *Contributions to Analysis and Geometry*. Johns Hopkins Univ. Press.

BARKER, Stephen F. (1969). *A filosofia da matemática.* Traduzido por Leônidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

BENJAMIN, Walter (1985). *Obras escolhidas - Magia e técnica, arte e política.* Traduzido por Sergio Paulo Rouanet. São Paulo: Brasiliense.

BENSE, Max (1971). *A pequena estética.* São Paulo: Perspectiva.

BERRY, Margaret (1975). *Introduction to systemic linguistics.* London: T. J. Batsford Ltda.

BERNSTEIN, Richard (1990). A sedução do ideal. *Face 3 (2)*: 195-206. São Paulo: Educ.

BOYER, Carl B. (1974). *História da matemática.* Traduzido por Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher.

BOCHENSKI, I. M. (1961). *A history of formal logic.* Traduzido por Ivo Thomas. University of Notre Dame Press.

BRET, Michel (1988). Procedure art with computer – technology. *Leonardo* 21 (1): 3-9.

BRIER, S. (1998). Biosemiotics and the foundation of cybersemiotics. *Anais do 1ª Seminário Avançado de Comunicação e Semiótica,* pp. 55-72. São Paulo: COS/PUC-SP.

BRINKER, Helmut (1987). *O zen na arte da pintura*. São Paulo: Pensamento.

BRISSON, Harriet E. (1992). Visualization in art and science. *Journal of the Internacional Society for the Arts, Sciences and Technology,* Vol. 25, Números 3 - 4.

BROUWER, L. E. J. (1952). Historical background, principles ans methods os intuitionism. *South African Journal of Science* 49: 139-146.

BUCHLER, Justus (1940). *The philosophy of Peirce: Selected Writings.* London: Routledge.

CAPRA, Fritjof (1983). *O ponto de mutação*. São Paulo: Cultrix.

___ (1986). *O tao da física*. São Paulo: Cultrix.

CHAUGEUX, Jean-Pierre & **CONNES**, Alain (1996). *Matéria e Pensamento.* Traduzido por Luiz Paulo Rouanet. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista.

___ (1983). *L'homme Neuronal*. Paris: Fayard.

CAROLYN, E. (1979). *Studies in the scientific and mathematical philosophy of Charles Sanders Peirce.* The Hague: Mouton.

COSTA, Mario (1995). *O sublime tecnológico.* São Paulo: Experimento.

COSTA, Newton C. A. da (1980). *Ensaios sobre os fundamentos da lógica.* São Paulo: Hucitec.

___ (1993). *Sistemas Formais Inconsistentes*. Curitiba: Ed. da UFPR.

___ (1997). *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso Editorial.

COSTA, Newton C. A. da, Béziau, J. & Bueno O. (1998). *Elementos de teoria paraconsistente de conjuntos.* Campinas: UNICAMP.

COSTA, Sueli I. R. & SANTOS, Sandra A. (1990). Geometrias não-euclidianas. *Ciência Hoje*, Vol. 11, Número 66, Agosto.

COUCHOT, Edmond (1982). La synthèse numérique de l'image vers un nouvel ordre visuel*. Traverses 26*, octobre.

COX, Helmut (1992). Caricature, ready mades and metamorphosis: Visual mathematics in the context of art. *Journal of the Internacional Society for the Arts, Sciences and Technology,* Vol. 25, Números 3 - 4.

D' AMBROSIO, U. (2000). *Educação matemática.* São Paulo: Papirus Editora.

___ (1990). *Etnomatemática.* São Paulo: Editora Ática.

DAVIS, P. J. & **HERSH**, R. (1985). *A experiência matemática.* Traduzido por João B. Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves.

DEVLIN, Keith. (2000). *The Language of Mathematics: making the invisible visible.* New York:*:* W. H. Freeman & Company.

DIEUDONNÉ, J. (1982). The work of Bourbaki during the last thirty years*. Notices of the American Mathematical Society 29*, pp. 618-623.

DOCZI, György (1990). *O poder dos limites: harmonia e proporções na natureza, arte e arquitetura,* trad. Maria Helena de Oliveira Tricca e Júlia Bárány Bartolomei. São Paulo: Mercuryo.

DOMINGUES, Diana org. (1997). *Arte no século XXI – A humanização das tecnologias.* São Paulo: Editora UNESP.

ECO, Umberto (1976). *A theory of semiotics*. London: Macmillan.

EDGERTON, Samuel Y. (1991). *The Heritage of Giotto's Geometry* New York: Ithaca.

ENCICLOPÉDIA EINAUDI (1988). *Lógica Combinatória. Volume 13,* Casa da Moeda-Imprensa Nacional - Portugal.

EISELE, Carolyn (1979). *Studies in the scientific and mathematical philosophy of Charles Sanders Peirce.* The Hague: Mouton.

FARIS, J. A. (1981). C. S. Peirce´s existential graphs. *Bulletin, The Institute of Mathematics and its Aplications,* Vol. 17, nr.11, p. 226-233. USA: Essex.

FISCH, M. H. (1986). *Peirce, Semeiotic and Pragmatism: Ensays by Max Fisch.* Bloomington: Indiana University Press.

FLUSSER, Vilém (1985). *Filosofia da caixa preta - Ensaios para uma futura filosofia da fotografia.* São Paulo: Editora Hucitec.

FREGE, Gottlob (1967). The thought: A logical enquiry. In *Philosophical Logic*, P.F. Strawson (ed.). Oxford: Oxford University Press.

FRISIA, Helmut (1992). New representative methods for real and imaginary environments. *Journal of the Internacional Society for the Arts, Sciences and Technology,* Vol. 25, Números 3 - 4.

GERDES, P. & **BULAFO** G. (1994). *Sipatsi: Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane.* Maputo, Moçambique: Globo.

GERDES, P. org. (1994). *Explorations in ethnomathematics and ethnoscience in Mozambique.* Maputo, Mozambique: Globo.

GHYKA, Matila C. (1968). *El numero de oro - Ritos y ritmos pitagoricos en el desarrolo de la civilizacion occidental*. Buenos Aires: Poseidon.

GRANGER, Giles G. (1974). *Filosofia do estilo*. São Paulo: Perspectiva.

GUIDON, Niède (1991). *Pintures préhistorique du Brésil: L´art rupestre du Piaui.* França: Hérissey - Évreux.

HALL, E. T. (1977). *A dimensão oculta*. Rio de Janeiro: Francisco Alves.

HAUSER, Arnould (1972). *História social da literatura e da arte*. São Paulo: Mestre Jou.

HEGEL, G. W. F. (1985). *Os pensadores - vida e obra.* São Paulo: Abril Cultural.

HILDEBRAND, H. R. (1994). *Umatemar – Uma arte de raciocinar.* Texto inédito. São Paulo: Dissertação de Mestrado apresentada no Departamento de Multimeios da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

HOFSTADTER, Douglas R. (1984). *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*. Milano: Adelphi Edizione S.P.A.

HORGAN, John (1993). The death of proof . *Scientific American 45*, nº 2, october.

IBRI, Ivo Assad (1992). *Kósmos Noetós - A arquitetura metafísica de Charles Sanders Peirce*. São Paulo: Perspectiva.

___ (1994). *Kósmos Poietikós - Criação e descoberta na filosofia de Charles Sanders Peirce.* Tese de Doutorado apresentada no Dep. de Filosofia da Universidade de São Paulo.

JANSON, H. W. (1977). *História da arte - Panorama das artes plásticas e da arquitetura da pré-história a atualidade*. Lisboa: Fundação C. Gulbenkian.

KAPPRAFF, Jay (1990). *Connections – The geometric bridge between art and science.* New York: McGrawHill.

KARLSON, Paul (1961). *A magia dos números: a matemática ao alcance de todos.* Rio de Janeiro: Globo.

KETNER, Kenneth L. (1992). *Reasoning and logic of things – The Cambridge Conferences Lectures of 1898.* Cambridge, Mass: Harvard Univ. Press.

KOESTLER, Arthur. (1978). *Janos - uma sinopse*. São Paulo: Melhoramento.

LAURENTIZ, Paulo. (1991). *A holarquia do pensamento artístico*. São Paulo: Editora UNICAMP.

LAURENTIZ, Silvia (1999). *As imagens animadas*. Tese de Doutorado em Comunicação e Semiótica. São Paulo: PUCS, sob orientação de Lúcia Santaella.

LÉVY, Pierre. (1994). *Tecnologia da inteligência – O futuro do pensamento na era da informática,* trad. Costa, Carlos Irineu. São Paulo: Editora 34.

___ (1996). *O que é virtual?* Traduzido por: Paulo Neves. São Paulo: Editora 34.

LEIBNITZ, G. W. (1983). Leibnitz. *Os Pensadores.* São Paulo: Abril Cultural.

MACHADO, Arlindo (1984). *Ilusão especular*. São Paulo: Brasiliense.

___ (1993). *Máquina e Imaginário.* São Paulo: Edusp.

___ (1989). A Imagem Eletrônica: Problemas de Representação. *Face 2 (1).* São Paulo: Educ.

___ (1989). A Imagem Digital - Notas para uma Abordagem Semiótica. *Face 3 (2).* São Paulo: Educ.

MANDELBROT, Benoit B. (1982). *The fractal geometry of nature.* Freeman.

MANNO, Ambrosio Giacomo (1990). *A filosofia da Matemática,* trad. Rodrigues, Armindo José. Lisboa: Edições 70.

MARCUS, Solomon. (1997a). Identity. *Anais do 1ª Jornada do Centro de Estudos Peirceanos da PUCSP.* São Paulo: PUCSP-CEPE.

___ (1997b). The cognitive self under successive shocks. *Cadernos do CECCS - Centro de Estudos em Ciências Cognitivas e Semióticas 2, junho.* São Paulo: PUCSP.

___ (1998). Infosemiotics. *Anais do 1ª Seminário Avançado de Comunicação e Semiótica,* pp. 73-78. São Paulo: COS/PUC-SP.

MARTIN, Gabriela. (1997). *Pré-história do nordeste do Brasil.* Recife: Editora Universitária, UFPE.

MATURANA, H.R. & **VARELA**, F.J. (1994). *De máquinas y seres vivos – Autopoieses: la organización de lo vivo.* Traduzido por J.A. Llores (1997). Porto Alegre: Artes Médicas.

MCLUHAN, Marshall. (1964). *Os meios de comunicação - como extensão do homem,* trad. de Décio Pignatari. São Paulo: Cultrix.

MINSKY, Marvin. (1986). *The society of mind.* New York: Touchstone.

MORAES, Lafayette (1999). Os Grafos Existenciais de Charles Sanders Peirce. *Anais da 2ª Jornada do Centro de Estudos Peirceanos da PUCSP*. São Paulo: PUCSP-COS.

MORTENSEN, Chris & **ROBERTS** Lesley (1997). Semiotics and the foundations of mathematics. *Semiotica 115* (1/2): 1-25.

MURPHEY, Murray G. (1961). *The development of Peirce's philosophy.* Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press.

NAGEL, Ernest e **NEWNAM**, James R. (1973). *Prova de Gödel*. São Paulo: Editora Perspectiva.

NELSEN, R. B. (1993). *Proof without words exercise invisible thinking classroom.* Research Material Number I. Washigton: The Mathematical Association of Americal.

NILSON, Paulo (1999). Quase melhor que o original. *Super interessante* 13 (1): 42-46. São Paulo: Abril.

NÖTH, Winfried (1997). Representation in semiotics and in computer sciencs. *Semiotica 115* (1/2): 203-213. Berlim.

___ (1990). *Handbook of semiotics.* Bloomington: Indiana Univ. Press.

___ (1995). *Panorama da semiótica. De Platão a Peirce*. São Paulo: Annablume.

___ (1996). *A semiótica no século XX*. São Paulo: Annablume.

NÖTH, Winfried & **SANTAELLA**, Lúcia. (1998). *Imagem*. São Paulo: Editora Iluminuras.

O'CONNOR, J. J. & **ROBERTSON**, E. F. (1996). *Non-Euclidean Geometry.* http: //www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/histtopics/non-euclidean_geometry.html.

O'HARA, Frank (1960). *Jackson Pollock.* Belo Horizonte: Itatiaia.

OCHS, Peter (1993). Continuity as vagueness: The mathematical antecedents of Peirce’s semiotics. *Semiotica* 96 (3/4): 231-255.

PANOFSKY, Erwin. (1979). *O Significado nas Artes Visuais.* São Paulo: Perspectiva.

PARENTE, André org. (1993). *Imagem Máquina - A Era das Tecnologias do Virtual*. Rio de Janeiro: Editora 34.

PAZ, Octávio (1977). *Marcel Duchamp ou o Castelo da Pureza.* São Paulo: Perspectiva.

PEIRCE, Charles Sanders. (1931-58). *Collected Papers.* Vols. 1-6, ed. Hartshorne, Charles and Paul Weiss; vols. 7-8, ed. Burks, Athur W. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press. Referida como CP.

___ (1975). *Semiótica e filosofia - Como tornar clara nossas idéias.* São Paulo: Cultrix.

___ (1976). *The New Elements of Mathematics,* ed. Eisele, Carolyn. 4 vols. The Hague: Mouton. Referida como NEM.

___ (1977). *Semiótica*. São Paulo: Perspectiva.

___ (1983). Peirce e Frege. *Os Pensadores.* São Paulo: Abril Cultural*.*

___ (1992). *Reasoning and the logic of things,* ed. Kertner, Kenneth Laine. Cambridge: Harvard University Press.

___ (1839-1914). *Escritos coligidos de Charles Sanders Peirce,* trad. D'Oliveira, Armando Moura e Pomerangblum, Sergio. São Paulo: Abril Cultural.

PEITGEN, Heinz-Otto & **RICHTER**, Peter H. (1986*). The beauty of fractals: imagens of complex dynamical systems*. Berlin: Heidelberg.

PEITGEN, Heinz-Otto & **JÜRGENS**, Hartmut & **SAUPE**, Dietmar. (1992*). Chaos and fractals - New frontiers of science*. New York: Springer-Verlag.

PESSIS, Anne-Marie (1987*). Art rupestre préhistorique: premiers registres de la mise en scene.* Paris: Tese de doutorado apresentada na Universidade de Paris.

PESSIS-PASTERNAK, Guita ed. (1991). *Do caos à inteligência artificial.* São Paulo: Editora UNESP.

PIRSIG, Robert M (1990). *Zen e arte de manutenção da motocicleta.* São Paulo: Paz e Terra.

PLAZA, Julio (1991). *A imagem digital*. Texto inédito. São Paulo: Tese de livre docência na Escola de Comunicações e Artes na Universidade São Paulo.

POPPER, Frank (1983). Art of the Eletronic Age. New York: Harry N.Abrams, Inc. Publishers.

QUEIROZ, G. S. (1998). *Sobre a dualidade entre intuicionismo e paraconsistência*. Tese de doutorado em filosofia. Campinas: UNICAMP, sob orientação de Ítala M. L. D`Ottaviano.

RIVLIN, Robert (1986). *The algoritmic image - Graphic visions of the computer age.* Washington: Microsoft Press.

ROTMAN, Brian (1988). Toward a semiotics of mathematics. *Semiotica* 72 (1/2): 1-35.

___ (1987). Signifying nothing: The semiotics of zero. London: Macmillan.

SANTAELLA, M. Lúcia (1980). *Produção de Linguagem e Ideologia*. São Paulo: Cortez.

___ (1987). *O Que é Semiótica*. São Paulo: Brasiliense.

___ (1990). Outr(a)idade do mundo. *Linguagens - Revista da Regional Sul da Associação Brasileira de Semiótica*, N° 3, Agosto: 58.

___ (1992a). *A Assinatura da Coisa - Peirce e a Literatura*. Rio de Janeiro: Imago.

___ (1992b). *Cultura das Mídias*. São Paulo: Razão Social.

___ (1993a). *A percepção - uma teoria semiótica.* São Paulo: Experimento.

___ (1993b). *Metodologia Semiótica - fundamentos* Tese de Livre Docência pela Universidade São Paulo.

___ (1994). *Estética de Platão a Peirce*. São Paulo: Experimento.

SEARCH, P. (1995). The semiotics of the digital imagem. *Leonardo,* vol. 28, nº 4:311-317.

SOGABE, Milton (1996). *Além do olhar*. Tese de doutorado em comunicação e semiótica. São Paulo: PUCS, sob orientação de Lúcia Santaella.

THOM, René (1980). L’ espace et les signes. *Semiotica* 29 (3/4): 193-208.

UEXKÜLL, Jakob von (1982). Introduction: Meaning and science in Jakob von Uexküll´s concept of biology. *Semiotica*, 42 (1): 25-82.

UEXKÜLL, Thure von (1982). Introduction: Meaning and science in Jakob von Uexküll´s concept of biology. *Semiotica*, 42 (1): 1-24.

VAINA, Lucia (1980). Fuzzy sets in the semiotic of text. *Semiotica* 31 (3/4): 261-272.

VIERA, J. A. (1994). *Semiótica, Sistemas e Sinais*. Tese de doutorado em comunicação e semiótica. São Paulo: PUCS, sob orientação de Lúcia Santaella.

___ (1998). Cybersemiotics: a systemic vision. *Anais do 1ª Seminário Avançado de Comunicação e Semiótica,* pp. 79-85. São Paulo: COS/PUC-SP.

VIRILIO, Paul (1988). *A máquina de visão,* trad. Pires, Paulo Roberto. Rio de Janeiro: José Olympio Editora.

VIRILIO, Paul (1993). *A arte do motor,* trad. Pires, Paulo Roberto. São Paulo: Estação.

WEYL, H. (1949). *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton: Princeton University Press.

WIENNER, Norbert (1978). *Cibernética e sociedade.* São Paulo: Cultrix.

ZEMAN, J. Jay (1974). Peirce’s Logical Graphs. *Semiotica* 12 (3): 239-256.

9. ÍNDICE DAS ILUSTRAÇÕES

Figura 2_4 - *Chapéu Côncavo dos Índios Americanos*. In **O Poder dos Limites: Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura**, de György Doczi, Editora Mercuryo, São Paulo, 1981, p.14.

Figura 2_5 - *Chapéu Convexo dos Índios Americanos*. In **O Poder dos Limites: Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura**, de György Doczi, Editora Mercuryo, São Paulo, 1981, p.14.

Figura 2_6 - *Análise proporcional de chapéus trançados do tipo convexo.* In **O Poder dos Limites: Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura**, de György Doczi, Editora Mercuryo, São Paulo, 1981, p.16.

Figura 2_7 - *Manta Tecida Chilkat.* In **O Poder dos Limites: Harmonias e Proporções na Natureza, Arte e Arquitetura**, de György Doczi, Editora Mercuryo, São Paulo, 1981, p.17.

Figura 2_8 - *Modelagem Possíveis I, II e III e Carteiras trançadas de mão - Siptasi.* In **SIPATSI Tecnologia, Arte e Geometria em Inhambane**, de Paulo Gerdes & Gildo Bulafo, Imprensa Globo, Maputo, Moçambique, 1994.

2.2. As imagens e a matemática na cultura ocidental - Umatemar - uma arte de raciocinar

2.2.1. Ciclo pré-industrial

Figura 2_9 - *Lamento ante Cristo Morto, de Giotto (1304/6).* In **Gênios da Pintura - Giotto**, de Victor Civita (ed.), Abril Cultural, São Paulo, 1968, p.22-23.

Figura 2_10 - *A descida da cruz, de Rogier Van der Weyden (1435/6).* In **O livro da arte,** tradução de Monica Stahel, Martins Fontes, São Paulo, 1996, p.491.

2.2.2. Ciclo industrial mecânico

Figura 2_11 - *Nu descendo a escada, de Marchel Duchamp (1912)*. In **Art of the electronic age,** de Frank Popper, Harry N. Abrams, Inc. Publishers, New York, 1983, p.11.

Figura 4_2 - *Grafo com arestas em linhas curvas para solução do problema dos convidados de uma festa*. Elaborado por Victor A. Geuer Argueta e Hermes Renato Hildebrand.

4.2.1.2. O teorema das quatro cores

Figura 4_3 - *Um Exemplo de Solução Gráfica do Problema das Quatro Cores*. Elaborado por Hermes Renato Hildebrand.

4.2.2. Imagens geradas nas geometrias projetivas

4.2.2.1. A garrafa de Klein e faixa de Möebius

Figura 4_4 - *Curva de Klein.* Imagem elaborada pelo software "Mathematica", In The Mathematica Book, 4th edition, de Stephen Wolfram, Wolfram Media Inc., 2001.

Figura 4_5 - *A garrafa de Klein.* In The Geometry Center, site de internet: internet: http://www.geo.umn.edu/zoo/toptype/klein/, 1995.

Figura 4_6 - *A faixa de Möebius.* In **Word of Escher - Texas**, site de internet: http://www.wordofescher/.

Figura 4_7 - *Faixa de Möebius.* Imagem elaborada pelo software "Mathematica", In **The Mathematica Book**, 4th edition, de Stephen Wolfram, Wolfram Media Inc., 2001.

4.2.2.2. O Sistema *Optverse*

Figura 4_8; Figura 4_9; Figura 4_10; Figura 4_11 - *O optiverse.* In **O Optiverse,** site de internet: http://new.math.uiuc.edu/optiverse/.

4.2.3. Imagens geradas nas geometrias propriamente dita

4.2.3.1. As imagens fractais

Figura 4_12 - *As imagens fractais - Imagem real de Montanha de Kilimanjaro, foto de John Reader.* In **Chaos and fractals: new frontiers of science,** de Heinz-Otto Peitgen & Hartmut Jürges & Dietmar Saupe New York, Springer-Verlag New York Inc., 1992, p.464-465.

Figura 4_13 - *As imagens fractais.* In **Chaos and fractals: new frontiers of science,** de Heinz-Otto Peitgen & Hartmut Jürges & Dietmar Saupe New York, Springer-Verlag New York Inc., 1992, p.464-465.

Figura 4_14 - *Os triângulos de Pascal*. Elaborado por Hermes Renato Hildebrand.

Figura 4_15 - *As imagens fractais - Os Atratores de Lorentz.* In **Chaos and fractals: new frontiers of science,** de Heinz-Otto Peitgen & Hartmut Jürges & Dietmar Saupe New York, Springer-Verlag New York Inc., 1992, p.688.

Figura 4_16 - *As imagens fractais - Série de Benoit B. Mandelbrot.* In **Chaos and fractals: new frontiers of science,** de Heinz-Otto Peitgen & Hartmut Jürges & Dietmar Saupe New York, Springer-Verlag New York Inc., 1992, p.464-465.

4.2.3.2. As simetrias

Figura 4_17 - *As simetrias .* In **The language of mathematics: making the invisible visible,** de Keith Devlin, W. H. Freeman & Company, New York, 2000, plate 8, p.120.

4.2.3.3. O Sistema *Mathematica*

Figura 4_18; Figura 4_19; Figura 4_20; Figura 4_21; Figura 4_22; Figura 4_23 e Figura 4_24.

Todas as imagens deste tópico foram elaboradas pelo software "Mathematica", In **The Mathematica Book**, 4th edition, de Stephen Wolfram, Wolfram Media Inc., 2001.

4.2.3.4. O teorema de Fermat

Figura 4_26 - *O teorema de Fermat para n=3.* In **The language of mathematics: making the invisible visible,** de Keith Devlin, W. H. Freeman & Company New York, 2000, plate 16, p.248.

Figura 4_27 - *O teorema de Fermat para n=4.* In **The language of mathematics: making the invisible visible,** de Keith Devlin, W. H. Freeman & Company New York, 2000, plate 16, p.248.

4.3. Os modelos lógicos

Figura 4_25 - *Ponte de Koningsberg.* In **History of Mathematic**, site de internet:
http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/micellaneous/konigsberg.htm.

5. POR UMA SEMIÓTICA DA ESCRITA MATEMÁTICA

6. POR UMA SEMIÓTICA DO MODELO MATEMÁTICO

7. CONCLUSÃO